

На правах рукописи



Тутуева Александра Вадимовна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
МОДЕЛИРУЮЩИХ ПОДСИСТЕМ САПР НА ОСНОВЕ ПОЛУЯВНЫХ  
МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Специальность: 05.13.12 Системы автоматизации проектирования  
(промышленность)

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2021

Работа выполнена на кафедре систем автоматизации проектирования (САПР) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)» (ФГАОУ ВО СПбГЭТУ «ЛЭТИ»).

Научный руководитель:

кандидат технических наук, доцент Бутусов Денис Николаевич, профессор кафедры САПР СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

Оппоненты:

доктор технических наук, профессор Саенко Игорь Борисович, ведущий научный сотрудник лаборатории проблем компьютерной безопасности Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук, г. Санкт-Петербург;

кандидат физико-математических наук, доцент Пчелинцев Александр Николаевич, заведующий кафедрой высшей математики Тамбовского государственного технического университета, г. Тамбов.

Ведущая организация:

Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь.

Защита диссертации состоится 16 декабря 2021 года в 15<sup>30</sup> часов на заседании диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 212.238.02 ФГАОУ ВО СПбГЭТУ «ЛЭТИ» по адресу: 197376, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «СПбГЭТУ «ЛЭТИ»» и на сайте университета [www.etu.ru](http://www.etu.ru) в разделе «Подготовка кадров высшей квалификации» - «Объявление о защитах докторских и кандидатских диссертаций».

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 197376, Россия, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, дом 5.

Автореферат разослан 15 октября 2021 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.238.02  
к.т.н., профессор



Н.М. Сафьянников

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

### Актуальность исследования:

Одной из основных задач при разработке новых продуктов и изделий в современной промышленности является сокращение сроков и стоимости их проектирования с учетом постоянного усложнения объектов проектирования и роста требований к их характеристикам. Среди наиболее эффективных инструментов решения данного вопроса выделяют применение моделирования на всем цикле разработки, включая начальные этапы проектирования. Известно, что проектные решения, принимаемые в начале маршрута проектирования, определяют до 80% финансовых затрат на разработку продукта. Особенно актуальным является повышение эффективности и снижение сроков реализации проектных процедур за счет создания нового математического и программного обеспечения моделирующих подсистем, применяемых при автоматизированном проектировании. Особое значение вычислительная эффективность средств моделирования приобретает при проектировании объектов, описываемых системами высокой и сверхвысокой размерности, т.е. математическое описание которых содержит более  $10^4$  зависимостей. Как и в случае более простых систем, для подобных объектов необходимо выполнять:

– многократные расчеты по математическим и исполняемым моделям, выполняемые для различных сценариев эксплуатации объекта проектирования при структурном анализе, анализе движения, а также оценке износа и стойкости;

– моделирование на длительных временных интервалах для обнаружения нелинейных эффектов и исследования свойств моделей, появляющихся с течением времени.

Несмотря на развитие средств вычислительной техники в последние десятилетия с тенденцией к параллельной организации вычислений, производительности доступных проектировщикам вычислителей не всегда достаточно для эффективного решения задач моделирования. Причину этого еще в 1984 г. сформулировал Артур Джаффе: «Это может быть парадоксальным, но чем больше и лучше становятся компьютеры, тем масштабнее проблемы, которые ученые и инженеры хотят решать. Размах превышает доступность». Совершенствование вычислительных устройств приводит к усложнению моделей объектов проектирования и увеличению объема выполняемых вычислений, делая невозможным эффективное моделирование при имеющемся уровне технического обеспечения. Поэтому для моделирования систем высокой размерности необходимо не только реализовывать подходы по распараллеливанию вычислений с учетом доступных вычислительных

мощностей, но и разрабатывать и применять новые численные методы, снижающие затраты на вычислительные процедуры при сохранении требуемой точности.

Для применения большинства численных методов интегрирования необходимо привести математическое описание разрабатываемой системы к нормальной форме Коши. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) являются одним из наиболее распространенных способов математического описания объектов проектирования. Таким образом, вычислительная эффективность алгоритмов интегрирования, используемых в современных САПР для решения систем ОДУ, определяет временные затраты на моделирование, и, следовательно, влияет на продолжительность всего процесса проектирования. Вне зависимости от свойств моделируемой системы ОДУ, включая степень жесткости, размерность и др., часто проектировщик может применять один и тот же метод интегрирования, что для ряда задач влечет избыточные вычислительные затраты при долгосрочном моделировании или многопараметрическом исследовании. В большинстве САПР в роли таких алгоритмов выступают многошаговые неявные методы высокого порядка, а также одношаговые методы Рунге-Кутты. Интегрирование с использованием неявных многошаговых методов подразумевает перерасчет матрицы Якоби, а также решение системы алгебраических уравнений методом Гаусса на шаге интегрирования. При моделировании систем высокой размерности это существенно увеличивает временные затраты и приводит к значительному накоплению погрешностей округления. При этом применение явных многошаговых методов для интегрирования жестких задач такой размерности не является целесообразным ввиду их низкой устойчивости, а одношаговые методы Рунге-Кутты не обладают необходимой вычислительной эффективностью, поскольку требуют многократного вычисления функций правой части на каждом шаге интегрирования.

Перспективным подходом к интегрированию жестких систем ОДУ является использование одношаговых полуявных методов интегрирования, впервые предложенных для моделирования гамильтоновых систем, и их обобщенных полунявных модификаций для негамильтоновых задач. Такие алгоритмы для вычисления разных переменных состояния могут включать как явные, так и неявные вычисления, что увеличивает устойчивость метода при сохранении вычислительных затрат на уровне явных одношаговых методов. Отметим, что практическое применение данного класса алгоритмов для моделирования систем высокой размерности, как и в случае методов Рунге-Кутты, ограничено существенными по сравнению с многошаговыми методами вычислительными затратами, связанными с многократным обращением к функции правой части на шаге интегрирования. Таким образом, разработка полуявных многошаговых методов численного

интегрирования для моделирующих подсистем перспективных САПР является актуальной задачей предметной области.

### **Цель и задачи исследования**

**Цель диссертационной работы** – сокращение временных, трудовых и экономических затрат на проектирование многокомпонентных изделий, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, за счет создания и применения нового математического и программного обеспечения моделирующих подсистем САПР, обеспечивающих повышение производительности труда проектировщика и качества проектируемого изделия.

**Объект исследования** — моделирующая подсистема САПР технических объектов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Предмет исследования** — математическое и программное обеспечение моделирующей подсистемы САПР технических объектов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

### **Задачи диссертационной работы**

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие **научно-технические задачи**:

1. Сравнительное исследование существующих алгоритмов, применяемых в моделирующих подсистемах САПР, с целью выявления недостатков существующих средств автоматизации проектирования с точки зрения моделирования объектов, описываемых ОДУ высокой размерности, и определение путей их усовершенствования.

2. Разработка математического обеспечения перспективных моделирующих подсистем САПР в форме полужавных многошаговых методов численного интегрирования для решения систем ОДУ.

3. Разработка методики оптимизации конечно-разностных схем в предлагаемых алгоритмах моделирующей подсистемы САПР.

4. Разработка и апробация программного обеспечения моделирующих подсистем САПР с применением библиотеки тестовых задач.

### **Основные методы исследования**

Для решения поставленных задач в диссертационной работе используются методы теории подобия и моделирования, подходы вычислительной математики, положения теории построения САПР, сравнительный анализ, полунатурный эксперимент, имитационное моделирование, технология виртуальных инструментов.

### **Новые научные результаты**

**Научная новизна** полученных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

1. Предложены новые способы усовершенствования существующих алгоритмов численного моделирования объектов проектирования за счет применения полужавного принципа вычислений к известным решателям ОДУ.
2. Разработано новое математическое обеспечение моделирующих подсистем САПР в форме семейства полужавных многошаговых методов типа предиктор-корректор.
3. Предложена методика оптимизации конечно-разностных схем, основанных на полужавных многошаговых методах прогноза-коррекции.

### **Достоверность научных результатов**

Подтверждается результатами математического и компьютерного моделирования в инструментальных средах, а также инженерной практикой решения задач моделирования и проектирования объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

### **Научные положения, выносимые на защиту**

1. **Математическое обеспечение** моделирующей подсистемы САПР в форме полужавных многошаговых методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Алгоритмы и **программное обеспечение** расчетного модуля моделирующей подсистемы САПР, предназначенное для компьютерного моделирования объектов, описываемых системами ОДУ высокой размерности.
3. Методика оптимизации конечно-разностных моделей, полученных с помощью полужавных многошаговых методов.

### **Практическая ценность**

Практическое значение результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработанное математическое обеспечение моделирующих подсистем САПР в форме многошаговых полужавных методов интегрирования обеспечивает повышение точности численного решения систем ОДУ, в том числе на длительных интервалах моделирования.
2. Разработанное программное обеспечение моделирующих подсистем САПР повышает эффективность труда проектировщика за счет снижения временных затрат на долгосрочное моделирование и многопараметрическое исследование объекта

проектирования, особенно в случае проектирования объектов, описываемых системами ОДУ высокой размерности.

### **Практическая реализация и внедрение результатов работы**

Разработанное математическое и программное обеспечение внедрено в производственный процесс ООО «АМТЭЛ». Алгоритмы полувязных многошаговых методов интегрирования внедрены в учебный процесс кафедры САПР СПбГЭТУ «ЛЭТИ» при подготовке бакалавров и магистров по направлению «Информатика и вычислительная техника».

Теоретические положения, методики и результаты исследований диссертации использованы в следующих НИР, выполненных в течение 2016–2021 гг.:

1. НИР «Исследование методов высокоточного моделирования нелинейных систем» (договор 9985ГУ/2015 от 05.04.2016).

2. НИР «Теоретические основы гибридного моделирования нелинейных динамических систем» (договор 16-31-00264\16 от 27.01.2016, договор 16-31-00264\17 от 05.05.2017).

3. НИР «Теория и средства проектирования цифровых генераторов хаотических сигналов» (договор 17-07-00862\17 от 10.04.2017, 17-07-00862\18 от 16.03.2018).

4. НИР «Основы исследовательского проектирования мемристивных систем» (договор 19-07-00496\19 от 07.01.2019, 19-07-00496\20 от 21.05.2020).

5. НИР «Защищенные системы связи на основе хаотических отображений с управляемой симметрией» (договор 20-79-10334 от 27.07.2020).

### **Апробация результатов работы**

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 12 международных научных, научно-практических и научно-технических конференциях:

1. 2015 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (Санкт-Петербург, 2–4 февраля 2015 г.);

2. 2016 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (Санкт-Петербург, 2–3 февраля 2016 г.);

3. International Siberian Conference on Control and Communications (Москва, 12–14 мая 2016 г.);

4. XIX международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (Санкт-Петербург, 25–27 мая, 2016 г.);

5. 2017 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (Санкт-Петербург, 1–3 февраля 2017 г.);

6. XX международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (Санкт-Петербург, 24–26 мая, 2017 г.);
7. XXI международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (Санкт-Петербург, 23–25 мая, 2018 г.);
8. 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (Санкт-Петербург, 28–30 января 2019 г.);
9. Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (Екатеринбург, 25–26 апреля 2019 г.);
10. 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (Будапешт, 1–3 июля 2019 г.);
11. 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (Санкт-Петербург, 27–30 января, 2020);
12. XXIII международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (Санкт-Петербург, 27–29 мая, 2020 г.).

### **Публикации**

Основные теоретические и практические результаты диссертации опубликованы в 19 научных трудах, из них по теме диссертации 19, среди которых 3 публикации в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных в действующем перечне ВАК, 15 публикаций, индексируемых в международной базе данных Scopus. Имеется 5 программ, зарегистрированных в федеральном Реестре программ для ЭВМ.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 4 глав с выводами и заключения. Она изложена на 138 страницах машинописного текста и содержит 40 рисунков, 3 таблицы, 2 приложения общим объемом 3 страницы и список литературы из 115 наименований, среди которых 42 отечественных и 73 иностранных авторов.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснованы актуальность выбранной темы диссертационной работы, формулируются цели и задачи исследования. Определены объект и предмет исследования, а также излагаются основные положения, выносимые на защиту. Определены методы исследования, выполнен обзор предметной области.

**Первая глава** диссертационной работы посвящена сравнительному анализу алгоритмов численного решения систем ОДУ, используемых в моделирующих подсистемах САПР с точки зрения их вычислительной эффективности при проектировании и моделировании систем высокой размерности.



В главе рассмотрены типовые задачи, возникающие в современных подходах к проектированию с применением технологий виртуализации. Обобщенная схема модель-ориентированного проектирования, реализующая такой подход, показана на рисунке 1. В соответствии с данной схемой, первоначальная концепция разрабатываемого продукта реализуется инженерами-проектировщиками в виде компьютерной модели, с помощью которой выполняется оценка производительности и надежности продукта, а также анализируются затраты на производство. По завершению моделирования, спроектированное в виртуальной среде изделие может быть изготовлено с использованием технологий быстрого прототипирования, и после аппаратного тестирования, запущено в массовое производство.

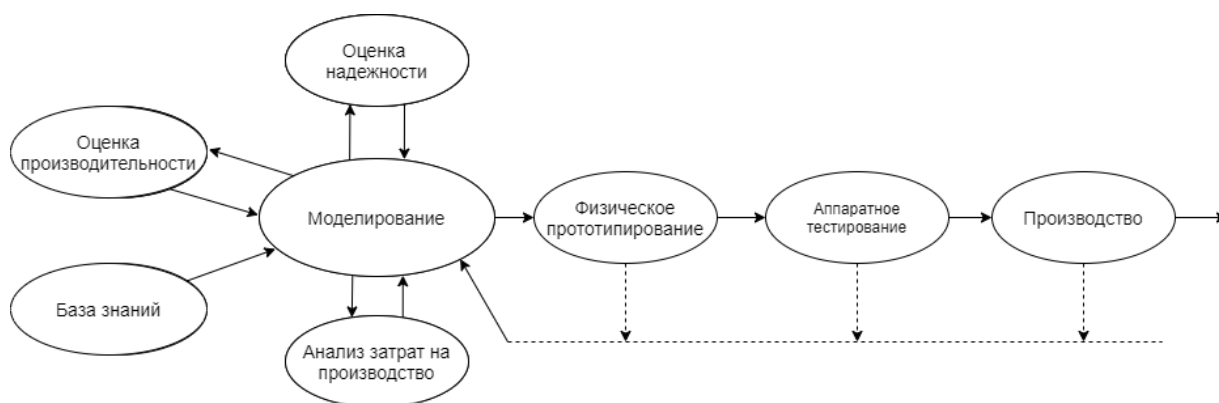


Рисунок 1 – Обобщенная схема модель-ориентированного проектирования

Таким образом, основой подхода проектирования с использованием виртуализации является построение параметрической модели изделия, и выполнение различных видов исследований с ее использованием, включая структурный анализ, анализ движения, а также анализ износа и надежности. Высокая размерность систем дифференциальных и алгебраических уравнений, используемых в качестве математических моделей при данных видах анализа в виртуальных средах проектирования, приводит к следующим проблемам компьютерного моделирования:

1. Низкая точность расчетов, выполняемых по конечно-разностной модели объекта, из-за быстрого накопления погрешностей округления результатов арифметических операций.
2. Низкая скорость вычислений при многопараметрическом исследовании динамического поведения объекта проектирования.
3. Снижение достоверности получаемых численных результатов при долгосрочном моделировании.

Большинство инженеров-проектировщиков, работающих с программным обеспечением САПР, используют встроенные решатели систем дифференциальных уравнений в качестве готового программного средства, непосредственно выполняющего задачу численной аппроксимации решения на заданном временном интервале. Как правило, проектировщик самостоятельно осуществляет выбор метода интегрирования с точки зрения точности получаемой численной модели и вычислительных затрат на поиск решения, не обладая при этом требуемым уровнем компетенции в области численного решения ОДУ. Часто вне зависимости от характеристик моделируемой системы, включая степень жесткости, размерность и др., применяется один и тот же алгоритм интегрирования, что может приводить к избыточным вычислительным затратам и потере точности, особенно в случае моделирования технических объектов, описываемых системами высокой размерности.

Традиционно используемые алгоритмы численного решения систем дифференциальных уравнений в моделирующих подсистемах САПР не являются вычислительно эффективными при моделировании объектов, описываемых системами высокой и сверхвысокой размерности. В частности, явные многошаговые методы обладают относительно малой численной устойчивостью при высокой скорости вычислений, а неявные многошаговые методы демонстрируют высокие вычислительные затраты, связанные с аппроксимацией итерационными алгоритмами значений вне шага интегрирования, которые часто становятся неприемлемыми при моделировании систем большой размерности. Наиболее перспективными для реализации в современных моделирующих подсистемах являются многошаговые методы прогноза-коррекции. При малом числе итераций корректора они представляют собой полностью явные методы с вычислительными затратами, сопоставимыми с таковыми для методов явных методов Адамса. При увеличении числа итераций устойчивость таких методов становится близкой к неявным алгоритмам, при этом вычислительные затраты на интегрирование возрастают. Поэтому для применения многошаговых алгоритмов прогноза-коррекции для моделирования жестких и умеренно жестких систем, в том числе задач высокой размерности, требуется разрабатывать подходы повышения устойчивости не только за счет увеличения числа корректирующих итераций. Возможным способом улучшения характеристик устойчивости является применение полуявного принципа вычислений, ранее успешно использованного в одношаговом интегрировании. Предполагается, что применение такого подхода позволит увеличить вычислительную эффективность методов прогноза-коррекции без увеличения вычислительных затрат. Более того, при использовании полуявного способа вычисления, можно добиться снижения

вычислительных затрат за счет устранения избыточных вычислений на стадии прогноза, что важно в контексте решения задач высокой размерности. На основе данного подхода в диссертационной работе разрабатывается математическое и программное обеспечение.

Глава завершается постановкой цели и задач диссертационного исследования.

**Во второй главе** диссертационной работы изложен математический аппарат систем обыкновенных дифференциальных уравнений при моделировании объектов проектирования и их компонентов. Описаны алгоритмы численного интегрирования, используемые в моделирующих пакетах для решения систем ОДУ, включая одношаговые явные методы Рунге-Кутты, многошаговые методы Адамса и формулы дифференцирования назад. Обозначены недостатки существующих алгоритмов численного моделирования, ограничивающие их вычислительную эффективность при решении систем уравнений высокой размерности.

Предложено новое математическое обеспечение моделирующих подсистем САПР в форме полуявных многошаговых методов интегрирования, представляющих собой модификации метода Адамса-Башфорта-Мултона, также известного как метод прогноза-коррекции, с использованием полуявного принципа вычислений. Полуявное интегрирование применяется на этапе коррекции для более точной аппроксимации неявных значений.

Полуявные многошаговые методы прогноза-коррекции могут быть применены для численного решения систем ОДУ размерности два или выше. Для систем первого порядка такие алгоритмы вырождаются в классический метод Адамса-Башфорта-Мултона. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t); \\ \dot{y} = g(x, y, t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $f$  и  $g$  – функции правой части. Обозначим переменные состояния, найденные с применением явного метода Адамса-Башфорта за  $x_{n+1}^p$  и  $y_{n+1}^p$  соответственно. Затем, применим к системе (1) метод коррекции

$$x_{n+1} = x_n + hb_0 f(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + hb_0 g(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \quad (3)$$

где  $b_i$  – коэффициенты неявного метода Адамса-Мултона, а  $k$  – количество стадий метода.

Предлагаемый способ численного решения систем ОДУ основан на полуявном принципе вычислений, использующем предварительно рассчитанные значения переменных состояния на текущем шаге интегрирования для более точной аппроксимации остальных значений. В многошаговых формулах прогноза-коррекции этот подход применяется следующим образом. Заменяя  $x_{n+1}^p$  в (3) на  $x_{n+1}$  получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hb_0 f(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \\ y_{n+1} &= y_n + hb_0 g(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \end{aligned} \quad (4)$$

Формула (4) задает полуявный метод Адамса-Башфорта-Мултона. Также для метода Адамса-Башфорта-Мултона может быть рассмотрена полунявная модификация. В конечно-разностной схеме, полученной в результате применения такого метода, каждая строка содержит одно неявное вычисление переменной состояния, соответствующей решаемому уравнению:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hb_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \\ y_{n+1} &= y_n + hb_0 g(x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}) \end{aligned} \quad (5)$$

где неизвестные  $x_{n+1}$  и  $y_{n+1}$  для каждой переменной состояния могут быть вычислены с помощью метода Ньютона или других итерационных алгоритмов. В простейшем случае получаемая система алгебраических уравнений может быть решена аналитически относительно переменных состояния, которые должны вычисляться в  $(n+1)$  момент времени. Этот подход является наиболее эффективным с точки зрения скорости вычислений.

Оба предложенных алгоритма рассмотрены на примере двумерных систем. Однако данные многошаговые методы могут быть использованы при решении систем ОДУ произвольной размерности.

Для теоретического исследования устойчивости полуявных многошаговых методов Адамса-Башфорта-Мултона использовалась тестовая задача

$$\dot{x} = Ax, \quad (6)$$

где  $A$  – матрица размерности  $2 \times 2$  с собственными числами  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ . Пусть  $k = A_{11} / A_{22}$  – отношение элементов матрицы тестовой задачи на главной диагонали. Назовем  $k$  коэффициентом симметрии. Для матрицы в Жордановой нормальной форме  $k = 1$ , для

матрицы в нормальной форме Фробениуса коэффициент равен 0 или  $\infty$ . Это два крайних случая, которые дают наиболее различные функции устойчивости. Области устойчивости полуювного метода Адамса-Башфорта, полученные при  $k = 0$  и  $k = 1$  для тестовой задачи (6), показаны на рисунках 2 и 3. В сравнении с оригинальным методом Адамса-Башфорта-Мултона (рисунок 4), можно заключить, что даже в случае  $k = 0$  границы областей устойчивости предлагаемых методов шире. Также стоит отметить, что при исследовании тестовой задачи с симметричной матрицей, размер и форма областей устойчивости методов четвертого и пятого порядка сопоставимы с областями, полученными для методов второго и третьего порядка оригинального метода. Таким образом, можно теоретически предположить, что при реализации решателей на основе новых многошаговых полуювных алгоритмов с переменным шагом интегрирования, вычислительные затраты на всем интервале интегрирования могут быть меньше, чем для методов прогноза-коррекции того же порядка алгебраической точности.

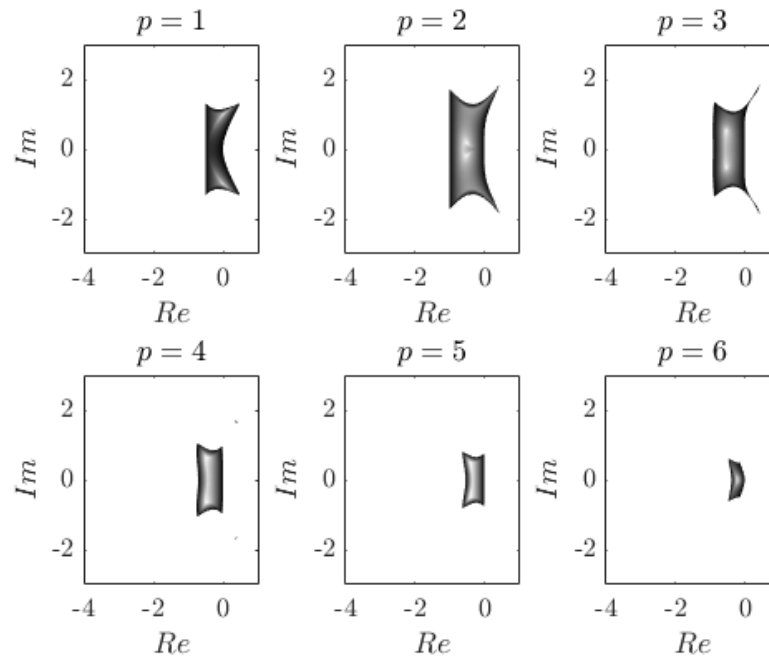


Рисунок 2 – Области устойчивости полуювного многошагового метода (4) для тестовой задачи (6) при  $k = 0$ ,  $p$  – порядок метода

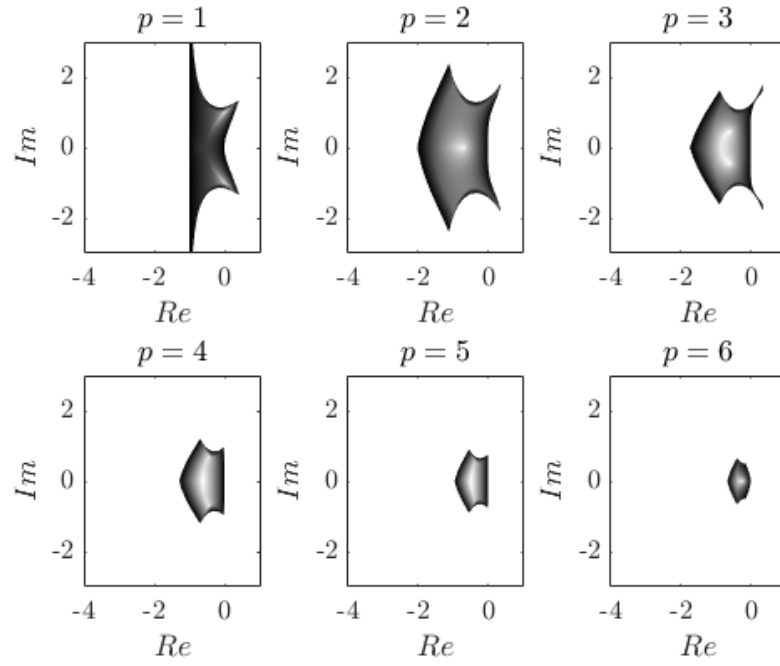


Рисунок 3 – Области устойчивости полуживного многошагового метода (4) для тестовой задачи (6) при  $k = 1$ ,  $p$  – порядок метода

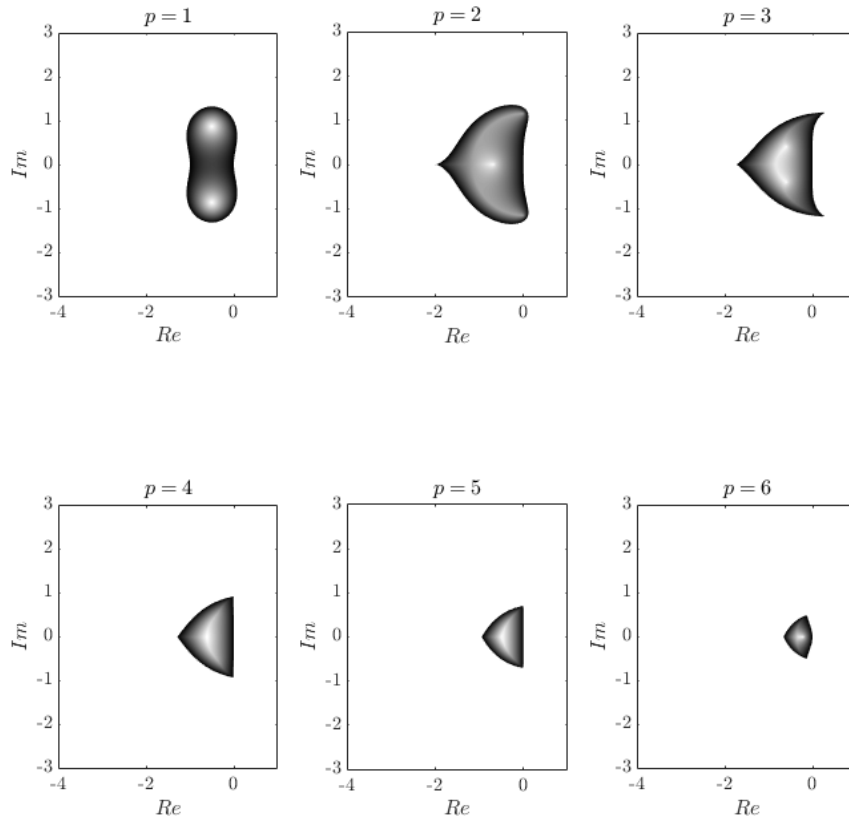


Рисунок 4 – Области устойчивости метода Адамса-Башфорта-Мултона,  $p$  – порядок метода

Помимо лучшей численной устойчивости, полужавный способ интегрирования в предложенных модификациях метода Адамса-Башфорта-Мултона позволяет на стадии прогноза не выполнять избыточные расчеты тех переменных состояния, оценку которых не требуют первые итерации конечно-разностной схемы корректора. При практических расчетах подобное снижение затрат на стадии прогноза позволяет существенно ускорить процесс многопараметрического исследования или долгосрочного моделирования.

Глава завершается выводами о численной устойчивости предложенных полужавных многошаговых методов интегрирования и их вычислительной эффективности при моделировании объектов, описываемых системами высокой размерности, в сравнении с традиционными методами прогноза-коррекции.

**В третьей главе** дано описание разработанного программного обеспечения моделирующих подсистем САПР. Перечислены этапы компьютерного моделирования объекта проектирования. Изложена структура разработанного программного модуля численного решения систем ОДУ.

Входными данными разработанного программного модуля являются система ОДУ, представленная в нормальной форме Коши, и параметры моделирования, а выходными – массивы значений переменных состояния. В качестве параметров моделирования выступают время моделирования, значения начальных условий и параметров системы, максимальное, минимальное и начальное значения шага интегрирования, а также значение допустимой погрешности решения.

Разработанный модуль состоит из нескольких блоков (рисунок 5), включая синтаксический анализатор системы ОДУ, модуль генерации конечно-разностных схем и модуль численного решения. Модуль синтаксического анализа предназначен для генерации массивов токенов, определяющих переменные состояния и параметры моделируемой системы, а также массива функций правых частей дифференциальных уравнений. Полученные данные используются в качестве входных значений блока генерации конечно-разностной схемы в соответствии с выбранным полужавным или полуневявным многошаговым методом интегрирования. Модуль численного решения использует полученную конечно-разностную схему для нахождения решения системы ОДУ с заданными параметрами моделирования.

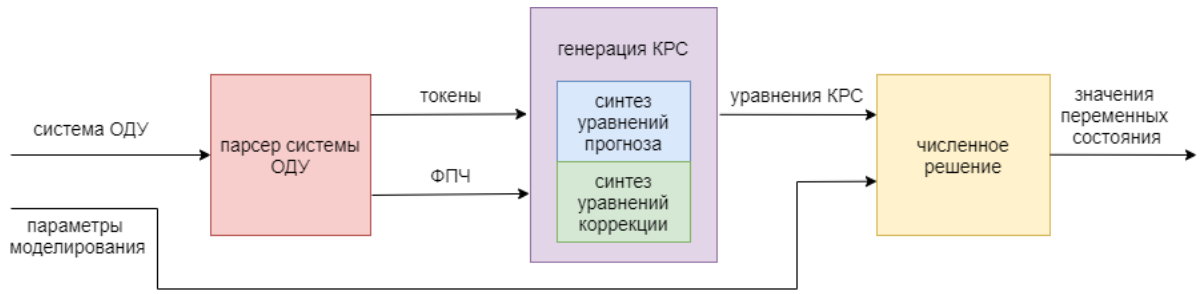


Рисунок 5 – Общая структура программного модуля численного интегрирования ОДУ с применением полуявных многошаговых методов интегрирования

В главе приводится методика генерации конечно-разностной схемы новых полуявных многошаговых методов Адамса-Башфорта-Мултона, подразумевающая выполнение двух этапов. Первый этап заключается в анализе матрицы обратных связей системы для определения оптимальной последовательности вычислений переменных состояния на этапе коррекции. При определении порядка вычислений учитывается два аспекта:

1. Первыми должны вычисляться те переменные, у которых соответствующие им функции правой части ДУ имеют наименьшее число обращений к переменным состояния, включая рассматриваемую переменную.

2. Если две или более переменных состояния содержат в функциях правых частей одинаковое количество обращений к переменным, включая самих себя, то из них для расчета стоит выбрать ту, которая входит в оставшиеся дифференциальные уравнения.

Первое требование обеспечивает минимизацию числа переменных состояния, которые необходимо рассчитать на стадии прогноза. Второе – позволяет использовать при расчете последующих переменных состояния уже скорректированные значения.

Алгоритм, реализующий заданные требования, описывается с использованием матрицы обратных связей  $N \times N$ , где цифра 1 обозначает наличие в функции правой части обратной связи на каждую из  $N$  переменных. Матрица обратных связей является входными данными алгоритма. Выходные данные – массив индексов переменных состояния, задающий последовательность вычислений на стадии коррекции. Перед началом работы алгоритма в конец матрицы обратных связей добавляется столбец, в котором содержатся суммы единиц в каждой строке. Это число задает количество обратных связей в каждом уравнении. Разработанный алгоритм состоит из следующей последовательности шагов:

1. Матрица обратных связей сортируется по последнему столбцу по возрастанию.
2. Рассматривается строка с минимальным числом в столбце сумм:



2.1. Если это наименьшее число из всех рассчитанных сумм, т.е. строка с минимальным числом обратных связей единственная, то индекс соответствующей ей переменной добавляется в выходной массив.

2.2. Если строк с минимальным числом обратных связей несколько, то для каждой соответствующей переменной рассматриваются новые суммы по всем строкам для матрицы обратной связи, из которой поочередно вычеркивается столбец, соответствующей каждой из этих переменных. В выходной массив выбирается индекс той переменной, у которой хотя бы одна из подсчитанных сумм минимальная среди сумм, рассчитанных для всех переменных. Если таких переменных несколько, то выбирается любая из них, например, первая по порядку.

3. Из матрицы обратных связей вычеркивается столбец и строка, соответствующие переменной, индекс которой был добавлен в выходной массив.

4. Если в матрице обратных связей не осталось переменных, то алгоритм завершает работу. Иначе выполнение возобновляется с п. 1.

Алгоритм определения оптимальной последовательности вычислений одинаков как для полужавного, так и для полунезавного многошаговых методов.

На втором этапе предложенного алгоритма анализа конечно-разностной схемы по полученному порядку интегрирования дифференциальных уравнений выполняется минимизация числа уравнений в конечно-разностной схеме стадии прогноза за счет устранения избыточных вычислений, результаты которых не будут использоваться в корректоре по методу Адамса-Мултона. Предлагаемый алгоритм для полужавного многошагового метода Адамса-Башфорта-Мултона состоит из следующей последовательности шагов:

1. Из массива, задающего порядок вычислений на стадии коррекции, по  $i$ -ому индексу выбирается переменная.

2. Для выбранной переменной по матрице обратных связей системы определяются индексы тех переменных, на которые в функции правой части есть обратные связи.

3. Во вспомогательном массиве в цикле просматриваются значения, расположенные по индексам, определенным в п. 2.

3.1 Если значение, расположенное по индексу во вспомогательном массиве, равно 1, то не делаем ничего.

3.2 Если значение вспомогательного массива, расположенное по индексу, равно 0, то меняем это значение на 1, а в выходной массив записываем переменную, которой соответствует рассматриваемый индекс.

4. Если значение вспомогательного массива, расположенное по индексу, определенному в п. 1, равно 0, то меняем это значение на 1.

5. Проверяем вспомогательный массив на содержание 0.

5.1 Если вспомогательный массив содержит только 1, то алгоритм завершает работу.

5.2 Если вспомогательный массив все еще содержит 0, то увеличиваем  $i$  на 1 и возвращаемся к п. 1.

Для полуявного многошагового интегрирования в рассмотренном алгоритме п. 3 и 4 меняют местами, т.е. информация о неявном вычислении переменной сразу добавляется во вспомогательный массив. Это позволяет устранить избыточные расчеты на стадии прогноза в тех случаях, когда уравнение переменной содержит обратную связь на саму себя.

Таким образом, в главе показано, что при полуявном многошаговом интегрировании вычислительные затраты на аппроксимацию значений на стадии прогноза могут быть снижены в сравнении с оригинальной схемой Адамса-Башфорта-Мултона.

В качестве выводов главы выдвинуто предположение о вычислительной эффективности предложенных алгоритмов моделирующих подсистем САПР как при постоянном, так и переменном шаге интегрирования.

В **четвертой главе** диссертационной работы дана оценка вычислительной эффективности разработанных программных средств моделирования объектов проектирования, описываемых системами ОДУ. Экспериментально подтверждены теоретические предположения о лучшей вычислительной эффективности разработанных полуявных многошаговых методов Адамса-Башфорта-Мултона на наборе тестовых задач из области схмотехнического проектирования и моделирования орбитальной динамики.

На рисунке 6 представлена схема электрической цепи, описываемой системой ОДУ пятого порядка. Для данной системы было выполнено исследование вычислительной эффективности решателей ОДУ на основе полуявных многошаговых методов интегрирования, реализующих предложенную методику оптимизации конечно-разностных схем. Также было выполнено сравнение с решателями на основе алгоритмов, традиционно используемых в модулях численного решения систем ОДУ моделирующих подсистем САПР (рисунок 7). Из полученных результатов видно превосходство предложенного решения в точности получаемых численных моделей и вычислительных затратах на получение численного решения.

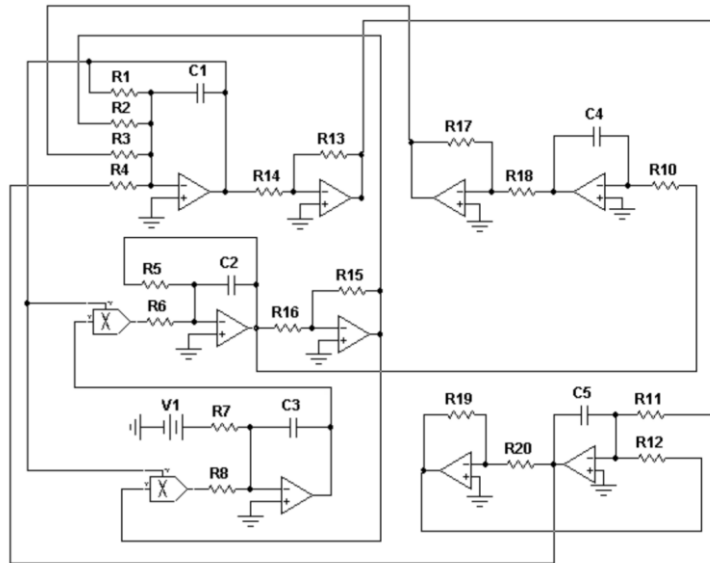


Рисунок 6 – Схема электрической цепи, описываемой системой ОДУ пятого порядка

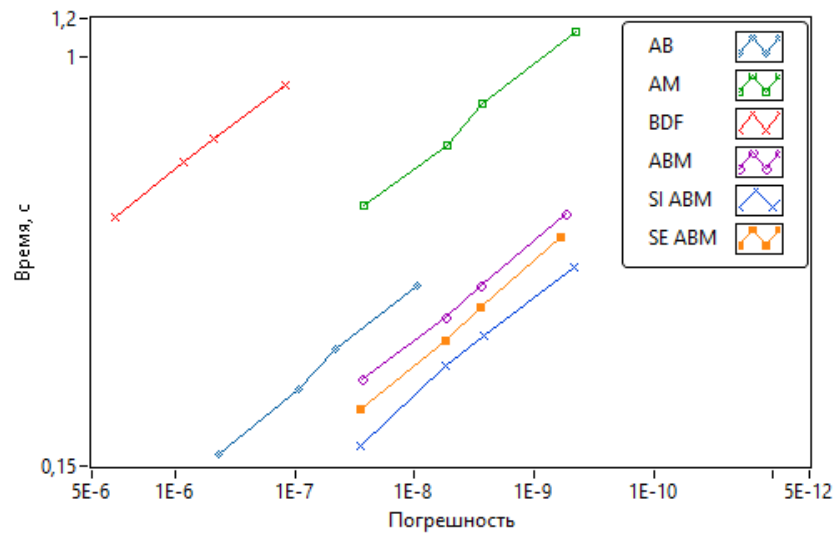


Рисунок 7 – Графики эффективности исследуемых численных методов при моделировании цепи, показанной на рисунке 6

Также было проведено исследование вычислительных затрат на моделирование систем высокой размерности. В качестве тестовой задачи была выбрана сеть из  $2 \cdot 10^3$  осцилляторов, каждый из которых описывается системой ОДУ размерности пять. На рисунке 8 представлены результаты исследования зависимости временных затрат на моделирование ансамбля таких систем. Видно, что предложенные полуавтоматические модификации метода Адамса-Башфорта-Мултона демонстрируют превосходство порядка 25–30% в вычислительных затратах над оригинальным алгоритмом Адамса-Башфорта-Мултона как на коротких, так и на длительных временных интервалах моделирования. Также видно, что затраты предлагаемых алгоритмов сопоставимы с затратами метода Адамса, который

позволяет получать модели точности на порядок меньшей, чем с применением предложенных полуявных многошаговых методов интегрирования.

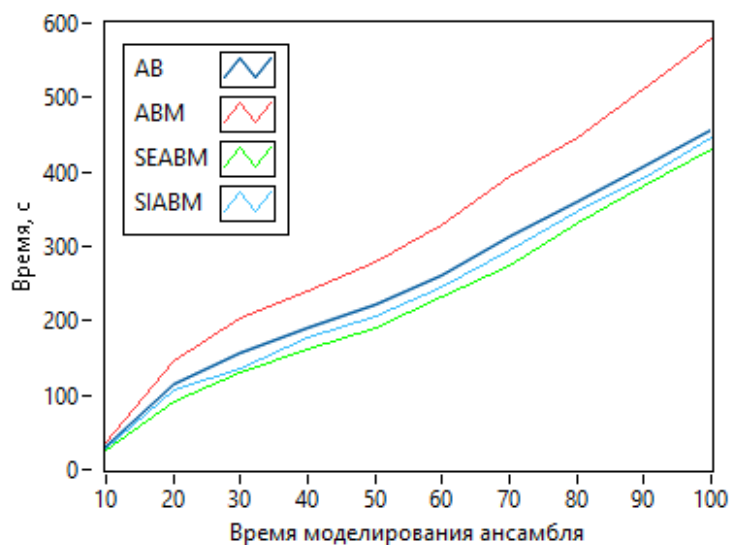


Рисунок 8 – Графики роста временных затрат на моделирование ансамбля из  $2 \cdot 10^3$  осцилляторов от величины интервала моделирования

Таким образом, экспериментально подтверждена возможность снижения вычислительных затрат более чем на 25% в сравнении с алгоритмами, традиционно используемыми в САПР для численного решения систем дифференциальных уравнений. Возможность подобного ускорения вычислений имеет большое значение при многопараметрическом исследовании моделей нелинейных объектов проектирования высокой размерности.

Глава завершается выводами о перспективах внедрения и применения разработанного программного и математического обеспечения моделирующих подсистем САПР на основе полуявных методов интегрирования в подразделениях проектных предприятий, разрабатывающих сложные технические объекты, описываемые математическими моделями высокой размерности.

**В заключении** сформулированы основные научные и практические результаты, достигнутые в ходе выполнения диссертационной работы.

**В приложении 1** приводятся акты о внедрении результатов работы.

**В приложении 2** приводится копия свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

### **Основные результаты работы**

1. Проведен сравнительный анализ существующих алгоритмов, применяемых в моделирующих подсистемах САПР для решения систем ОДУ. Сформулированы основные

требования к методам численного моделирования систем высокой размерности. Выявлены недостатки существующего математического и программного обеспечения модулей моделирующих подсистем САПР для численного решения ОДУ, и предложен способ их устранения – внедрение новых вычислительно эффективных полуявных многошаговых методов, позволяющих сократить сроки моделирования объекта проектирования, тем самым повышающих производительность труда проектировщика.

2. Предложено оригинальное математическое обеспечение моделирующих подсистем САПР в форме полуявных многошаговых методов численного интегрирования для решения систем ОДУ, которые обеспечивают улучшение точностных характеристик компьютерной модели объекта проектирования в том числе на длительных временных интервалах моделирования, а также позволяют ускорить процесс многопараметрического исследования.

3. Разработана и апробирована на наборе тестовых задач методика оптимизации конечно-разностных схем полуявных многошаговых методов, реализуемых в предлагаемых алгоритмах моделирующей подсистемы САПР.

4. Разработано и апробировано программное обеспечение модуля моделирующей подсистемы САПР на основе предложенных полуявных многошаговых численных методов интегрирования. Разработанные программные средства реализуют алгоритмы генерации оптимальной конечно-разностной схемы, исходя из анализа матрицы обратной связи системы ОДУ, описывающей объект проектирования. Предложенное программное обеспечение позволяет сократить время, затрачиваемое инженером проектировщиком на моделирование, на 25 %.

#### **Список опубликованных работ по теме диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

#### **Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК России:**

1. Тутуева А.В., Бутусов Д.Н., Андреев В.С. Способ оценки вычислительной эффективности решателей обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №. 6. – С. 301–301.

2. Бутусов Д.Н., Каримов Т.И., Тутуева А.В. Аппаратно-ориентированные неявные численные методы решения дифференциальных уравнений // Фундаментальные исследования. – 2016. – №. 2-1. – С. 22–27.

3. Тутуева А.В., Бутусов Д.Н., Копец Е.Е., Рыбин В.Г., Давидчук А.Г. Полуявные многошаговые методы Адамса-Башфорта-Мултона при решении жестких систем ОДУ. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2021. – Т. 64. – №. 8. – С. 599–607.

**Публикации в изданиях, индексируемых в международной базе данных**

**SCOPUS:**

1. Butusov D. N., Ostrovskii V. Y., Tutueva A. V. Simulation of dynamical systems based on parallel numerical integration methods // 2015 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIconRusNW). – IEEE, 2015. – С. 56-59.

2. Butusov D. N., Karimov A. I., Tutueva A. V. Symmetric extrapolation solvers for ordinary differential equations //2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIconRusNW). – IEEE, 2016. – С. 162-167.

3. Butusov D. N., Karimov A. I., Tutueva A. V. Hardware-targeted semi-implicit extrapolation ODE solvers //2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – IEEE, 2016. – С. 1-6.

4. Butusov D. N., Tutueva A. V., Homitskaya E. S. Extrapolation Semi-implicit ODE solvers with adaptive timestep //2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). – IEEE, 2016. – С. 137-140.

5. Karimov A. I., Butusov D. N., Tutueva A. V. Adaptive explicit-implicit switching solver for stiff ODEs //2017 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus). – IEEE, 2017. – С. 440-444.

6. Butusov D.N., Ostrovskii V.Y., Tutueva A.V., Savelev A.O. Comparing the algorithms of multiparametric bifurcation analysis // XX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM - 2017), Saint Petersburg, Russia, May 24-26. – IEEE, 2017. – С. 194-198.

7. Tutueva A.V., Rodionova E.A., Baidina M.P., Kavunskaya A.V., Kozak M.N. The convergence of semi-implicit numerical methods // Proceedings of the 2019 IEEE Conference of Russian Young Researches in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus), Saint-Petersburg, January 28–30. – IEEE, 2019. – С. 366-368.

8. Tutueva A.V., Andreev V.S., Karimov T.I., Kopets E.E., Khalyasmaa A.I. Fixed-Point Implementation of Extrapolation ODE Solvers // Proceedings of the Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT), Yekaterinburg, Russia, April 25 – 26. – IEEE, 2019. – С. 310-312.

9. Kaplun D.I., Tutueva A.V., Butusov D.N., Karimov A.I., Toming J. Memristive circuit simulation using the semi-implicit multistep method // Proceedings of the 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), Budapest, Hungary, July 1-3, 2019. – IEEE, 2019. – С. 98-101.

10. Tutueva A.V., Rodionova E.A., Pesterev D.O., Karimov A.I., Kozak M.N. High-performance Method-switching ODE Solver // Proceedings of the 2020 IEEE Conference of

Russian Young Researches in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), Saint-Petersburg, January 27 – 30. – IEEE, 2020. – С. 1446-1448.

11. Tutueva A.V., Rodionova E.A., Butusov D.N., Finite-difference Models of Thomas System Based on Semi-implicit Multistep Integration, Proceeding of the 2020 XXIII International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), St. Petersburg, Russia. – IEEE, 2020. – С. 97-100.

12. Ostrovskii V.Y., Tutueva A.V., Andreev V.S., Rybin V.G., Phase Bifurcation Analysis of Nonlinear Dynamical Systems, Proceeding of the 2020 XXIII International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM), St. Petersburg, Russia. – IEEE, 2020. – С. 88-91.

13. Butusov D., Karimov A., Tutueva A., Kaplun D., Nepomucheno E.G. The effects of Padé numerical integration in simulation of conservative chaotic systems //Entropy. – 2019. – Т. 21. – №. 4. – С. 362.

14. Tutueva A., Karimov T., Butusov D. Semi-Implicit and Semi-Explicit Adams-Bashforth-Moulton Methods //Mathematics. – 2020. – Т. 8. – №. 5. – С. 780.

15. Butusov D.N., Pesterev D.O., Tutueva A.V., Kaplun D.I., Nepomuceno E.G. New technique to quantify chaotic dynamics based on differences between semi-implicit integration schemes. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Т. 92. – С. 105467.

#### **Другие статьи и материалы конференций:**

1. Бутусов Д.Н., Федоров М.О., Чернышов А.А., Тутуева А.В., Рыбин В.Г. Исследование системы Декуана Ли с использованием полуявных методов интегрирования // Сборник докладов XXI Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM - 2018), 23–25 мая 2018 г. СПб. Изд. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. – Т. 1. – С. 607-610.

#### **Зарегистрированные программы для ЭВМ:**

1. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2017616407, Программа исследования высокоточных решателей нелинейных систем, дата регистрации: 06.06.2017, авторы: Борисов П.В., Бутусов Д.Н., Тутуева А.В.

2. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2019617100, Программа аналитического синтеза коэффициентов полуявных многошаговых методов, дата регистрации: 03.06.2019, авторы: Тутуева А.В., Бутсов Д.Н., Охота А.Г., Каримов А.И.

3. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2019663359, Программа синтеза коэффициентов гибридных многошаговых методов интегрирования, дата регистрации: 15.10.2019, авторы: Каримов Т.И., Тутуева А.В., Бутусов Д.Н.

4. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2019667159, Программа решения обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексированием одношаговых и многошаговых методов, дата регистрации: 19.12.2019, авторы: Тутуева А.В., Родионова Е.А., Каримов А.И., Каримов Т.И.

5. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2020617463, Решатель систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе полунявного метода Адамса-Башфорта-Мултона, дата поступления заявки: 02.07.2020, дата регистрации: 08.07.2020, авторы: Тутуева А.В., Бугусов Д.Н., Каримов Т.И.