На правах рукописи

Шумаков Александр Александрович

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина)» (СПбГЭТУ) на кафедре теоретических основ электротехники

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор,

профессор кафедры теоретических основ электротехники СПбГЭТУ

Бычков Юрий Александрович

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор,

профессор кафедры высшей математики 1 СПбГЭТУ

Постников Евгений Валентинович

доктор технических наук, профессор,

заведующий кафедрой теоретических основ электротехники федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Коровкин Николай Владимирович

Ведущая организация:

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича»

Защита состоится ___ марта 2013 года в ___ на заседании диссертационного совета Д.212.238.01 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) по адресу: 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета

Автореферат разослан ___ февраля 2013 года.

Ученый секретарь совета по защите

докторских и кандидатских диссертаций Д.212.238.01 Щеголева Н.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Для описания, протекающих в пространственных областях в реальном масштабе времени физических процессов, например, процесса распространения электромагнитного излучения в оптическом волокне, процесса распространения сигналов в нейронах и процесса распределения токов и напряжений в длинной линии, широко применяют математические модели с распределёнными параметрами, уравнения динамики которых представляют собой уравнения в частных производных. Поиск решений таких уравнений представляет собой сложную математическую задачу, что обуславливает существование большого числа как аналитических, так и численных методов их решения. Существующие методы характеризуются следующими недостатками. Во-первых, аналитические методы подходят для решения узких классов задач и требуют выполнения сложных операций и преобразований, что на практике часто оказывается неприемлемо. Во-вторых, численные методы либо не контролируют локальную точность находимого решения, либо её увеличение с целью получения более точного решения сопровождается уменьшением шага расчёта, что в свою очередь ведёт к быстрому увеличению объёма вычислений. В-третьих, исследование области решения характеризуемой большими значениями одной из координат при помощи численных методов, сопровождается выполнением большого числа шагов расчёта и характеризуется высоким уровнем накопленной погрешности, в результате практическая ценность полученных результатов равна нулю. В-четвёртых, численные методы не позволяют доказать существование, единственность и гладкость решения. Перечисленные недостатки существующих аналитических и численных методов указывают на то, что актуальной является разработка нового метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка нового аналитически-численного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, обладающего рядом преимуществ перед существующими методами.

Для достижения цели работы были поставлены и решены следующие задачи:

1. Изучены существующие методы исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, проанализированы их недостатки при исследовании различных математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, на основе анализа недостатков существующих методов и запросов практики сформулированы требования к разрабатываемому методу.

2. Разработан аналитически-численный метод исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, соответствующий сформулированным требованиям.

3. Разработан программный комплекс, автоматизирующий применение метода.

Предметом исследования данной работы являются математические модели динамических систем с распределёнными параметрами.

Методы исследования: математическое моделирование, аналитические и численные методы исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами с применением ЭВМ, вычислительный эксперимент.

Научные положения, выносимые на защиту: аналитически-численный метод исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами и реализующий его комплекс программ, включающие следующие алгоритмы:

- эффективного (как в плане объёма вычислений, так и в плане накапливаемой погрешности) исследования области больших значений одной из координат, на основе смещения заданных для исследования математической модели динамической системы с распределёнными параметрами граничных и начальных условий;

- исследования существования, единственности и гладкости решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами;

- поиска, с заданным уровнем локальной точности в виде абсолютной локальной погрешности расчёта, приближённых значений решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами (увеличение локальной точности не требует уменьшения шага расчёта и не ведёт к значительному росту объёма вычислений);

- поиска точных решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами в классе обобщённых функций с регулярными составляющими в виде полиномов относительно одной из координат.

Научная новизна содержится в следующих результатах диссертационной работы. Предложены алгоритмы:

- смещения заданных граничных и начальных условий по осям координат, позволяющий исключить необходимость выполнения большого числа шагов расчёта при исследовании решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами в областях сколь угодно больших значений одной из координат;

- поиска приближенных значений решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами с заданным уровнем локальной точности в виде абсолютной локальной погрешности расчёта;

- исследования существования, единственности и гладкости решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами;

- поиска точных решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами в классе обобщённых функций с регулярными составляющими в виде полиномов относительно одной из координат.

Практическая значимость работы заключается в создании программного комплекса автоматизирующего применение разработанного метода. Метод и комплекс программ были использованы для исследования различных математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, в том числе моделей описывающих распространение электромагнитного излучения в оптическом волокне и распределения токов и напряжений в длинной линии.

Достоверность результатов исследования подтверждается вычислительными и натурными экспериментами, осуществлявшимися для различных математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

Внедрение результатов работы. Разработанный метод был использован при проектировании подводных волоконно-оптических линий связи в рамках СЧ ОКР «Грация» и «Гранат КП 1Р», а также при расчётах линий связи подводных гидроакустических антенн в рамках СЧ ОКР «Кудесник» на заводе «Псковгеокабель».

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- Научно-практической конференции «Транспортно - коммуникационная система Арктики в геополитическом взаимодействии и управлении регионами в условиях чрезвычайных ситуаций» (Санкт-Петербург, 13-14 ноября 2009 г.);

- Научно-практической конференции «Наукоёмкие и инновационные технологии в решении проблем прогнозирования и предотвращения чрезвычайных ситуаций и их последствий» (Санкт-Петербург, 12-13 ноября 2010 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, среди которых 5 публикаций в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных в действующем перечне ВАК и 2 работы в научных трудах международных практических конференций, получено 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объём диссертации: диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объём диссертации 116 страниц текста, включая 15 рисунков и 4 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, показана практическая значимость работы.

В первой главе (разделы 1.1 и 1.2) обоснована необходимость разработки нового аналитически-численного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

В разделе 1.1 рассмотрены некоторые из используемых, при решении различных инженерных и научных задач, математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами: широко применяемая модель линии электропередач, разработанная Хэвисайдом; предложенная в 2005 году солитонная модель, описывающая распространение сигналов в нейронах; модель, описывающая распространение электромагнитного излучения в оптическом волокне. Описаны аналитические и численные методы, используемые для исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами: метод разделения переменных, метод дифференциальных связей, метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие. Проанализированы недостатки существующих методов при исследовании математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

В разделе 1.2 на основе проведённого в разделе 1.1 анализа существующих методов исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами и их недостатков, сформулированы требования к разрабатываемому аналитически-численному методу.

Во второй главе (разделы 2.1, 2.2 и 2.3) описаны аналитическая и численная части разработанного метода и алгоритм исследования области характеризуемой большими значениями одной из координат. Разработанный метод предназначен для исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, уравнение динамики которых имеет следующий вид:

$$A(\partial t, \partial x)Z(t,x) = F(t,x) + H(z_l(t,x)), \tag{1}$$

где $A(\partial t, \partial x)$ - квадратная матрица порядка L с полиномиальными от операторов частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$ элементами, $Z(t,x)$ и $F(t,x)$ - матрицы-столбцы решений $z_l(t,x),\ l \in 1,L$ и функций $f_l(t,x),\ l \in 1,L$ определяемых внешними воздействиями, $H(z_l(t,x))$ - матрица-столбец, строки $H_u(z_l(t,x)), u \in [1,L]$ которой содержат суммы произведений решений $z_l(t,x)$ и их частных производных в некоторых дробно-рациональных степенях. Для решения уравнения (1) заданы начальные $z_l(t,x)_{|t=0}, \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial t}_{|t=0}, \ldots, \frac{\partial^{n_l} z_l(t,x)}{\partial t^{n_l}}_{|t=0},\ l \in 1,L$ и граничные $z_l(t,x)_{|x=0}, \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial x}_{|x=0}, \ldots, \frac{\partial^{m_l} z_l(t,x)}{\partial x^{m_l}}_{|x=0},\ l \in 1,L$ условия, при этом уравнение (1) не содержит смешанных производных и старшие производные уравнения (1) содержатся в матрице $A(\partial t, \partial x)$.

В разделе 2.1 описана аналитическая часть метода, позволяющая с помощью преобразований Лапласа и их свойств, методов решения систем линейных алгебраических уравнений и функционально-степенных рядов, получить для решения уравнения (1) описание в виде обобщённой функции:

$$z_l(t,x) = z_l^-(t,x) + z_l^+(t,x), \tag{2}$$

где $z_l^-(t,x)$ - сингулярная составляющая решения, описываемая как сумма произведений с некоторыми весовыми коэффициентами импульсных функций $\delta(t)$ и $\delta(x)$ или их обобщённых производных некоторых порядков.

Для описания регулярной составляющей $z_l^+(t,x),\ l \in 1,L$ решения $z_l(t,x)$ уравнения (1) используется ряд двух независимых переменных, имеющий следующие две формы представления:

$$z_l^+(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}(t)\frac{x^i}{i!}, \tag{3}$$

$$z_l^+(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}(x)\frac{t^i}{i!}. \tag{4}$$

В случае если, начиная с некоторого i, все коэффициенты $R_{l.i}(t)$ или $R_{l.i}(x)$ равны нулю, аналитическая часть метода позволяет получить решение уравнения (1) в замкнутой форме – в виде полинома относительно одной из независимых переменных t или x.

В разделе 2.2 описан алгоритм, позволяющий исследовать область решения уравнения динамики, характеризуемой большими значениями одной из координат. Алгоритм основан на смещении граничных и начальных условий по осям координат и позволяет за счёт выполнения только аналитических операций, не связанных с выполнением большого числа шагов расчёта и не приводящих к возникновению вычислительной погрешности, приблизится по одной из осей координат к области, интересующей исследователя.

Получение смещённых по оси времени t начальных условий $\frac{\partial^k z_l(t,x)}{\partial t^k}|_{t=t_1}, k \in 0, n_l$ для точки с координатами $t = t_1, x = 0$ сводится к дифференцированию описания (3) по переменной t и последующей подстановке в результаты такого дифференцирования дискретного значения независимой переменной $t = t_1$:

$$\frac{\partial^k z_l(t,x)}{\partial t^k}|_{t=t_1} = \frac{\partial^k \sum\limits_{i=0}^{\infty} R_{l.i}(t) \frac{x^i}{i!}}{\partial t^k}|_{t=t_1}. \tag{5}$$

Смещённые по t граничные условия определяют на основе заданных при $x = 0$ граничных условий $\frac{\partial^k z_l(t,x)}{\partial x^k}|_{x=0}, k \in 0, m_l$ посредством разложения известных функций, описывающих граничные условия, в степенные ряды в точке, с абсциссой $t = t_1$:

$$\frac{\partial^k z_l(t+t_1,x)}{\partial x^k}|_{x=0} = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}^{[k]} \frac{t^i}{i!} \tag{6}$$

После выполнения алгоритма будут получены описания в виде степенных рядов новых, смещённых по переменной t граничных и начальных условий, соответствующих дискретным значениям независимых переменных $t = t_1, x = 0$, где t_1 любое наперёд заданное число. Смещение граничных и начальных условий по оси x выполняется аналогичным образом. Полученные смещённые граничные и начальные условия позволяют, в свою очередь, исследовать область сколь угодно больших значений одной из координат без выполнения большого числа шагов расчёта и накопления погрешности.

В разделе 2.3 описана численная часть разработанного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, предназначенная для поиска приближённых значений решений $z_l(t,x), l \in [1,L]$, соответствующих дискретным моментам времени $t = t_k$, и значениям пространственной координаты $x = x_k$, с заданным уровнем локальной точности - в виде абсолютной локальной погрешности расчёта. В рамках численной части метода приближенное значение решения $z_l(t_k, x_k)$ для некоторой точки $(t = t_k, x = x_k)$ ищется на основе приближённого значения решения и приближённых описаний граничных и начальных условий в точке $(t = t_{k-1}, x = x_k)$ или $(t = t_k, x = x_{k-1})$ и каждый шаг расчёта выполняется относительно одной из независимых переменных *t* или *x*. Для выполнения каждого из шагов расчёта по переменной *t* используется следующая форма описания решения:

$$z_l\,(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\infty} R_{l.j}^{[i]} \frac{t^j}{j!}\right]\frac{x^i}{i!}. \tag{7}$$

Поиск приближённого значения решения и приближённых описаний граничных и начальных условий (для выполнения следующего шага расчёта) сопровождается исследованием сходимости внутренних рядов (7), выбором шага расчёта, определением, на основе заданной локальной точности и шага расчёта, порядков полиномов $I_l^{[i]}$ используемых для вычисления частичной суммы внутренних рядов (7), и, на шаге расчёта по переменной *t*, осуществляется по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^k z_l(t,x,I_l^{[i]})}{\partial t^k}\Big|_{t=t_k} &= \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}^{[k]}(t, I_l^{[i]})\frac{x^i}{i!},\\
R_{l.i}^{[k]}(t, I_l^{[i]}) &= \sum_{j=0}^{I_{l.k}^{[i]}} R_{l.j}^{[k.i]}\frac{h_t^j}{j!},\\
\frac{d^n\left(\dfrac{\partial^k z(t,x)}{\partial x^k}\Big|_{x=x_k}\right)}{dt^n} &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=n}^{I_{l.k}^{[i]}} R_{l.j}^{[k.i]}\frac{h_t^{j-n}}{(j-n)!}\right)\frac{t^i}{i!}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В формуле (8) выражение $\frac{\partial^k z_l(t,x,I_l^{[i]})}{\partial t^k}|_{t=t_k}$ определяет начальные условия, а выражение $\frac{d^n\left(\frac{\partial^k z(t,x)}{\partial x^k}|_{x=x_k}\right)}{dt^n}$ граничные условия для следующего шага расчёта, при этом выражение $\sum_{j=0}^{I_{l.0}^{[0]}} R_{l.j}^{[0.0]} \frac{h_t{}^j}{j!}$ определяет приближённое значение решения уравнения (1) для точки с координатами $(t=t_k, x=x_k)$. Выполнение шага расчёта по переменной *x* сопровождается применением формул аналогичных (8).

На рисунке 1 проиллюстрировано выполнение первых шагов расчёта при помощи численной части разработанного аналитически-численного метода.

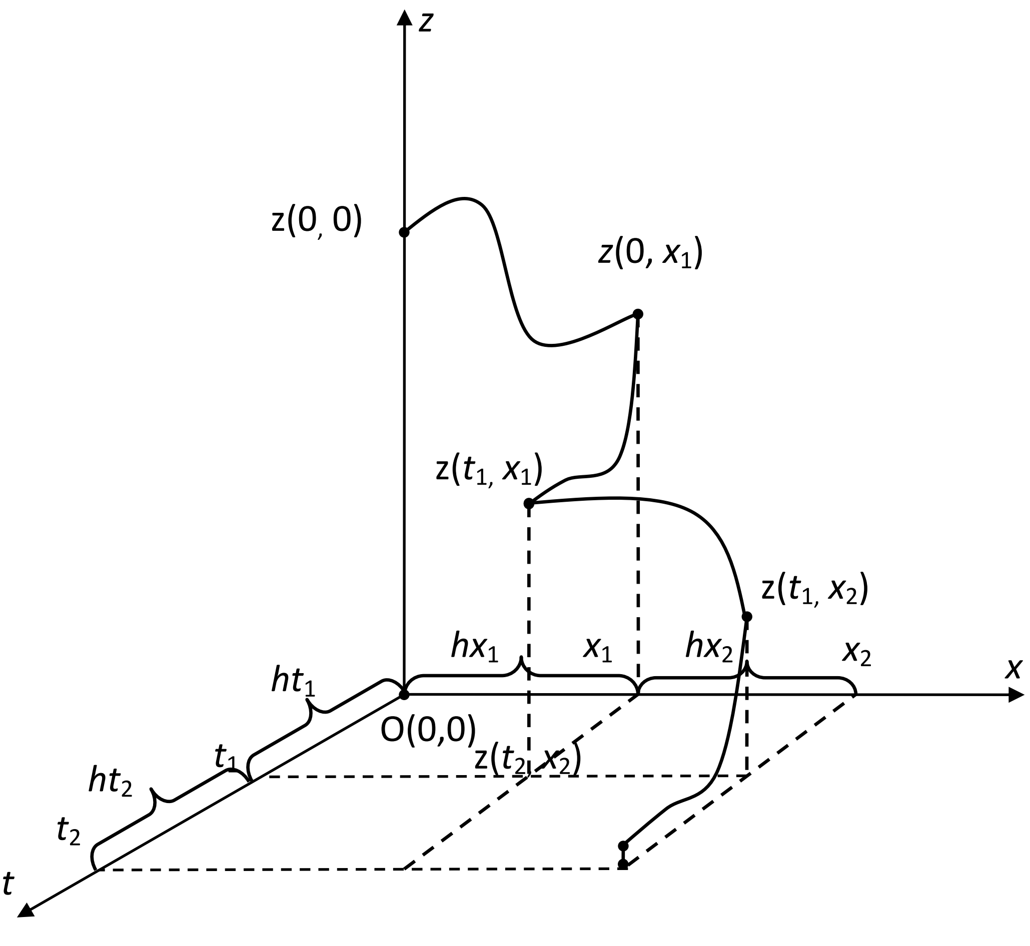

Рисунок 1. Выполнение первых шагов расчёта при помощи разработанного метода

Необходимо отметить что за каждым шагом относительно независимой переменных *t* или *x*, может следовать произвольное число шагов расчёта относительно любой из независимых переменных. В таблице 1 приведены выборочные результаты исследования математической модели, используемой для описания поведения волн на поверхности воды, с заданными уровнями абсолютной локальной погрешности расчёта $\varepsilon(h)=1\times10^{-5}$ и $\varepsilon(h)=1\times10^{-10}$ (уравнение динамики имеет вид уравнения Кортевега-де-Фриза $\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial t}\right]z(t,x)=6z(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}$).

Таблица 1

Выборочные результаты исследования математической модели используемой для описания поведения волн на поверхности воды с заданными уровнями абсолютной локальной погрешности расчёта $\varepsilon(h)=1\times10^{-5}$ и $\varepsilon(h)=1\times10^{-10}$

Параметр	Значение					
x	0.000000	0.290000	0.600000	0.890000	1.200000	1.490000
t	0.000000	0.300000	0.600000	0.900000	1.200000	1.500000
h_x	-	0.010000	-	0.010000	-	0.010000
h_t	0.010000	-	0.010000	-	0.010000	-
$z(t,x)$	-	-0.950470	-0.928456	-0.842972	-0.749362	-0.643719
$z(t,x,\varepsilon(h)=$ $=1\times10^{-5})$	-	-0.950470	-0.928456	-0.842964	-0.747212	-0.623678
$z(t,x,\varepsilon(h)=$ $=1\times10^{-10})$	-	-0.950470	-0.928456	-0.842965	-0.747257	-0.634841

В таблице 1 использованы следующие обозначения x и t – начала вынесенных в таблицу шагов расчёта, h_x и h_t – шаги расчёта по переменным x и t, $z(t,x)$ – точное значение решения, вычисленное на основе описания $z(t,x)=\frac{6x(x^3-24t)}{(x^3+12t)^2}$, $z(t,x,\varepsilon(h)=1\times10^{-5})$ и $z(t,x,\varepsilon(h)=1\times10^{-10})$ приближённые значения решения, полученные при помощи разработанного метода, и соответствующие заданным абсолютным локальным погрешностям расчёта $\varepsilon(h)=1\times10^{-5}$ и $\varepsilon(h)=1\times10^{-10}$.

Как видно из таблицы 1 уменьшение абсолютной локальной погрешности расчёта сопровождается уменьшением полной погрешности расчёта (разности между приближённым значением и точным значением решения). При исследовании других математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, уменьшение уровня абсолютной локальной погрешности также вело к уменьшению полной погрешности расчёта, что в свою очередь говорит о том, что при использовании разработанного аналитически-численного метода уменьшение локальной погрешности по меньшей мере в некоторых случаях ведёт к уменьшению полной погрешности расчёта.

В третьей главе (разделы 3.1 и 3.2) описаны разработанные алгоритмы исследования существования единственности и гладкости, решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

В разделе 3.1 описан алгоритм исследования существования и единственности решения уравнения динамики. В основе этого алгоритма лежит исследование сходимости двойного функционально-степенного ряда описывающего регулярную составляющую решения уравнения (1) и используемого при выполнении шагов расчёта в рамках численной части метода – (7).

Исследование сходимости ряда (7) реализуется пошаговым образом, по осям параллельным координатным осям независимых переменных t и x, и одновременно с получением приближённого значения решения уравнения (1) и приближённых описаний граничных и начальных условий для следующего шага расчёта на основе формул (8).

В результате выполнения шагов расчёта по переменным t и x вместо ряда (7) формируется выражение:

$$z_l\,(t,x) = \sum_{i=0}^{I_l}\left[\sum_{j=0}^{I_l^{[i]}} R_{l.j}^{[i]}\,\frac{{h_t}^j}{j!}\right]\frac{{h_x}^i}{i!}. \tag{9}$$

Выражение (9) определяет приближённое значение решения $z_l\,(t,x)$ после выполнения двух шагов расчёта по переменным t и x, при этом при выполнении шагов расчёта будет доказана сходимость ряда (7) (на основании исследования числовых мажорант ряда (7)), а следовательно и существование решения уравнения (1).

Единственность, как свойство решения, может быть исследована, исходя из того, что если для описания решения $z_l(t,x)$ уравнения (1) возможно сформировать несколько различных функционально-степенных рядов и имеет место сходимость двух или более из них, то это служит необходимым и достаточным условием существования неединственного решения $z_l(t,x)$ уравнения (1).

В разделе 3.2 описан алгоритм определения согласованных граничных и начальных условий – условий, при которых в решении уравнения динамики отсутствует сингулярная составляющая решения, обусловленная заданными граничными и начальными условиями. Применение этого алгоритма позволяет определить по заданным начальным (граничным) условиям согласованные с ними граничные (начальные) условия. С этой целью граничные условия представляются в виде функционально-степенных рядов с неизвестными коэффициентами:

$$\frac{\partial^k z_l(t,x)}{\partial x^k}\Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}^{[k]} \frac{t^i}{i!} \tag{10}$$

Далее выполняются диктуемые аналитической частью метода операции, после чего будет получено описание решения в виде:

$$z_l(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}(x) \frac{t^i}{i!}, \tag{11}$$

где

$$R_{l.i}(x) = \sum_{j=0}^{J_{l.i}} S_{l.j}^{[i]} \delta(x) + \sum_{j=0}^{\infty} R_{l.j}^{[i]} \frac{x^i}{i!} \tag{12}$$

Структура выражения (12) и коэффициентов $S_{l.j}^{[i]}$ такова, что содержит неизвестные коэффициенты $R_{l.i}^{[k]}$ разложения в ряды определяемых согласованных граничных условий (10) и известные коэффициенты, определяемые заданными начальными условиями и параметрами уравнения. Это позволяет определить коэффициенты $R_{l.i}^{[k]}$ разложения в ряд каждого из граничных условий, а сами граничные условия сформировать в виде (10).

Четвёртая глава (разделы 4.1, 4.2 и 4.3) посвящена описанию алгоритмов расширяющих границы применимости разработанного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

В разделах 4.1 и 4.2 описан алгоритм, который позволяет получить для решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с неравномерно распределёнными нестационарными параметрами, с нелинейностями в виде элементарных функций описания (2), (3) и (4). Уравнение динамики таких математических моделей имеет вид подобный уравнению (1):

$$A(\partial t, \partial x) Z(t,x) \; = \; F(t,x) + H(z_l(t,x)), \tag{13}$$

при этом как матрица $A(\partial t, \partial x)$ так и матрица $H(z_l(t,x))$ содержат смешанные производные (но старшие производные содержатся в матрице $A(\partial t, \partial x)$), коэффициенты при частных производных представляют собой функции независимых переменных *t* и *x*. Каждая строка *u* матрицы $H(z_l(t,x))$ имеет вид:

$$H_u(z_l(t,x)) = K(z_l(t,x), \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial x}, ..., t, x), \tag{14}$$

где $K(z_l(t,x), \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial z_l(t,x)}{\partial x}, ..., t, x)$ - некоторая элементарная функция от решений и их производных.

В разделе 4.3 описан алгоритм построения сетки при помощи разработанного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами. Сетка представляет собой множество траекторий вида изображенного на рисунке 1, каждая из которых обладает уникальными характеристиками отражающими существование и единственность решения, а также промежутки быстрого и медленного изменения решения. Алгоритм построения сетки проиллюстрирован на рисунке 2. На рисунке 3 приведены сетки для решений телеграфного уравнения, уравнения Кортевега-де-Фриза, уравнения Бюргерса, электромагнитного волнового уравнения.

Исследователь может предъявлять особые требования к алгоритму построения сетки. Во-первых, во всей области решения уравнения динамики могут быть промежутки, которые с точки зрения исследователя наиболее интересны. В таком случае для таких промежутков необходимо увеличить частоту узлов сетки, причем сам исследователь определяет эту частоту. Во-вторых, исследователю может потребоваться равномерная сетка, расстояния между узлами которой одинаковы во всей области. При решении обеих задач исследователь направленным образом изменяет величины шагов расчёта по независимым переменных *t* и *x*.

В пятой главе описан программный комплекс ***ANMSolver*** автоматизирующий применение разработанного метода исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами. В основе комплекса лежит библиотека ***MBSSolver***, которая содержит реализации следующих алгоритмов:

- получения описания решения (2) уравнения (1);

- поиска с заданным уровнем абсолютной локальной погрешности расчёта приближённого значения решения уравнения (1);

- определения согласованных граничных и начальных условий;

- исследования существования и единственности решения уравнения (1);

- построения сетки для решения (2) уравнения (1).

Программный комплекс разработан при помощи IDE Microsoft Visual Studio 2010 и языка C++ и допускает как независимое использование для исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, так и использование в рамках других программных комплексов.

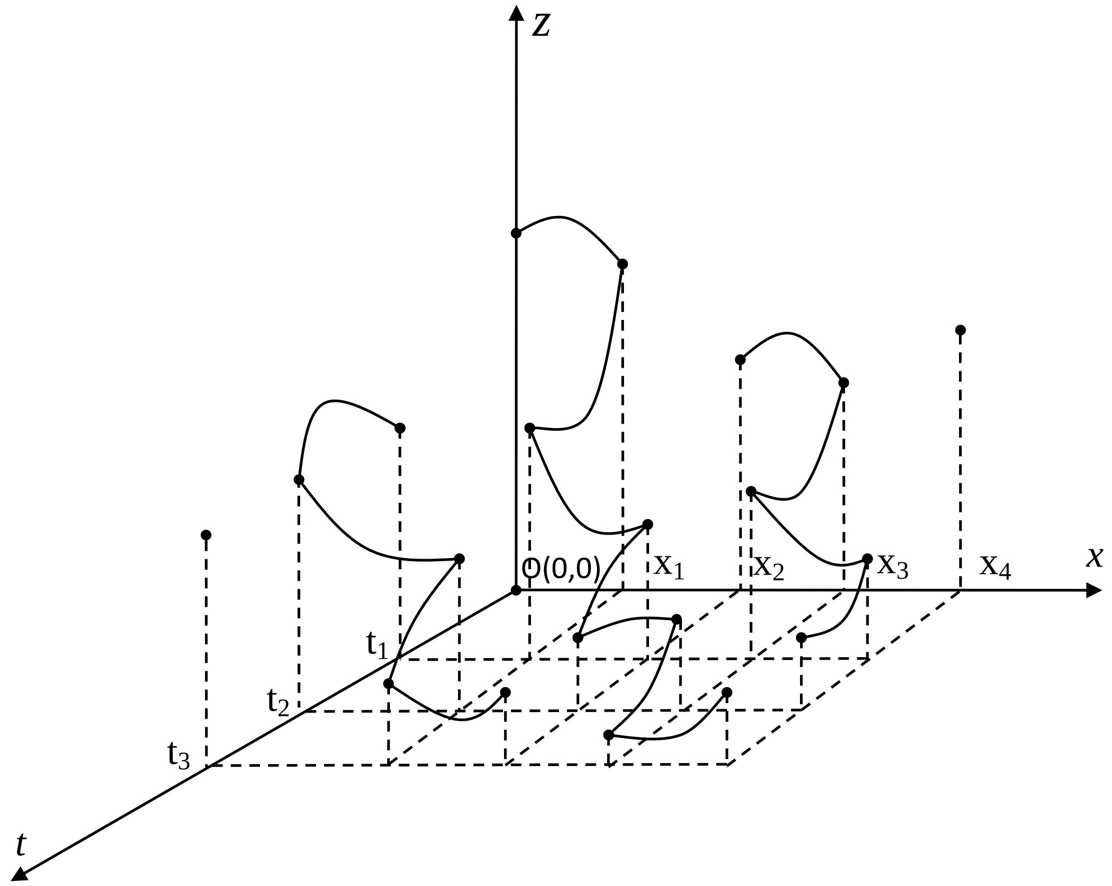

Рисунок 2. Построение сетки при помощи разработанного метода

В заключении подводятся итоги работы, делаются выводы об эффективности и применимости полученных результатов.

В приложениях 1 и 2 приведены соответственно копия свидетельства о регистрации программы для ЭВМ и общая схема применения разработанного метода при исследовании математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

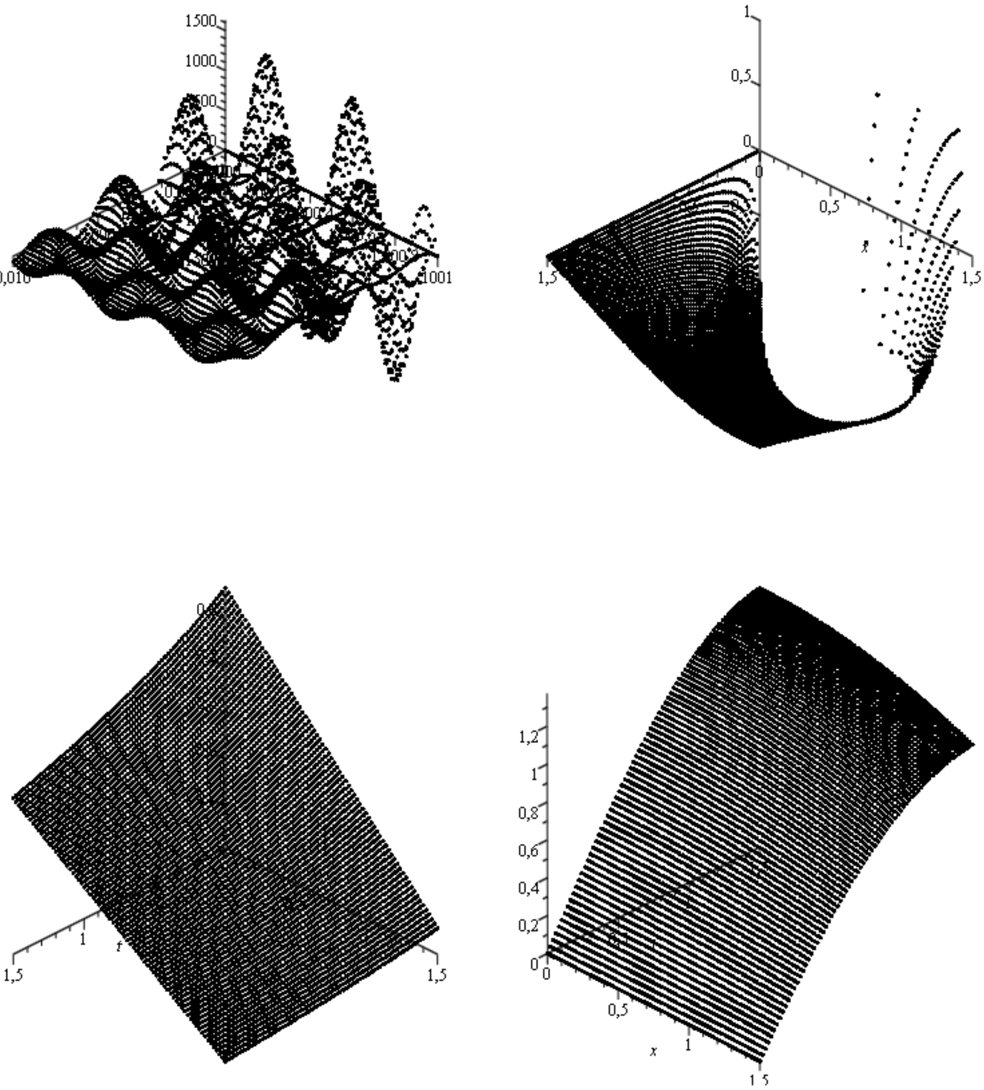

Рисунок 3. Сетки для решений телеграфного уравнения, уравнения Кортевега-де-Фриза, уравнения Бюргерса, электромагнитного волнового уравнения

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан аналитически-численный метод исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами. В рамках разработанного метода предложены следующие алгоритмы:

1.1. Исследования существования, единственности и гладкости решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами. Выполнение этих алгоритмов позволяет не только доказать существование решения, но и исследовать область сколь угодно близкую к границе области несуществования решения.

1.2. Исследования области решения уравнения динамики характеризуемой большими значениями одной из координат. Этот алгоритм основан на аналитических операциях не связанных с выполнением шагов расчёта и накоплением погрешности.

1.3. Вычисления с заданным уровнем локальной точности в виде абсолютной локальной погрешности расчёта приближённых значений решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, при этом повышение локальной точности находимого приближённого значения решения не требует изменения величины шага расчёта и не ведёт к значительному росту объёма вычислений.

1.4. Поиска точных решений уравнений динамики математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами в классе обобщённых функций с регулярными составляющими в виде полиномов относительно одной из координат.

2. Реализован программный комплекс, автоматизирующий применение разработанного метода. Программный комплекс допускает как самостоятельное использование, так и использование в рамках других программных комплексов для исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами.

3. Разработанные метод и комплекс программ были применены для исследования математических моделей динамических систем с распределёнными параметрами, описывающих распространение электромагнитного излучения в оптическом волокне и распределения токов и напряжений в длинной линии.

В целом результаты работы способствуют более полному пониманию и точному описанию физических процессов, происходящих в различных системах, в том числе в оптическом волокне и длинных линиях.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Расчёт динамики линейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределёнными параметрами на основе интегрального преобразования Лапласа и функционально-степенных рядов // Радиоэлектроника. 2009. № 2. С. 21-35.

2. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Вычислительный алгоритм анализа динамики нелинейных нестационарных электрических цепей с неравномерно распределёнными параметрами с помощью функционально-степенных рядов // Радиоэлектроника. 2009. № 4. С. 5-19.

3. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Существование и единственность решений уравнений динамики нелинейных электрических цепей с

неравномерно распределёнными нестационарными параметрами // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2010. № 10. С. 36-44.

4. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Анализ уравнений динамики нелинейных электрических цепей с неравномерно распределёнными нестационарными параметрами при помощи функционально-степенных рядов // Радиоэлектроника. 2011. № 4. С. 13-21.

5. Шумаков А.А. Смещение граничных и начальных условий при анализе динамики нелинейных электрических цепей с неравномерно распределёнными нестационарными параметрами // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2011. № 7. С. 96-101.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619072. Шумаков А.А., Бычков Ю.А. «MBSSolver»

Публикации в других изданиях

7. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Прогнозирование и предупреждение возникновения чрезвычайных ситуаций в физических системах на основе анализа их нелинейных неавтономных динамических моделей с распределёнными параметрами // Материалы международного конгресса. Том 1. Научно-практическая конференция «Транспортно-коммуникационная система Арктики в геополитическом взаимодействии и управлении регионами в условиях чрезвычайных ситуаций», Санкт-Петербург, 13-14 ноября 2009 г. – СПб.: ООО «ПИФ.COM», 2009. - С. 42-47.

8. Бычков Ю.А., Щербаков С.В., Шумаков А.А. Прогнозирование и предупреждение возникновения чрезвычайных ситуаций в физических системах на основе анализа существования решений описывающих их моделей с распределёнными параметрами // Материалы международного конгресса. Том 1. Научно-практическая конференция «Наукоёмкие и инновационные технологии в решении проблем прогнозирования и предотвращения чрезвычайных ситуаций и их последствий», Санкт-Петербург, 12-13 ноября 2010 г. – СПб.: ООО «ПИФ.COM», 2010. - С. 120-125.

Подписано в печать 20.02.2013 г. Формат 80x64 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 1,0.

Тираж 100 экз. Заказ 50.

Отпечатано с готового оригинал-макета

В типографии Издательства СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5