На правах рукописи

Подкопаев Борис Павлович

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ДИАГНОСТИРОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность: 05.12.14 – Радиолокация и радионавигация

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук

Санкт-Петербург – 2011

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Официальные оппоненты:

– доктор технических наук, профессор Гантмахер Владимир Ефимович
– доктор технических наук, профессор Мироновский Леонид Алексеевич
– доктор технических наук, вед. н. с. Осипов Андрей Владимирович

Ведущая организация: ОАО «Концерн ПВО «Алмаз-Антей», Федеральный научно-производственный центр открытое акционерное общество «Ордена Трудового Красного Знамени Всероссийский научно-исследовательский институт радиоаппаратуры» (ОАО «ВНИИРА»)

Защита состоится «____» ______ **2011 г.** в ________ на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций **Д 212.238.03** в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) по адресу: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д.5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина).

Автореферат диссертации разослан «____» _________ 2011 г.

Ученый секретарь совета по защите
докторских и кандидатских диссертаций Баруздин С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Последняя треть двадцатого столетия и начало нынешнего характеризуются широчайшим внедрением радиолокационных и радионавигационных систем во все области человеческой деятельности, начиная от научно-прикладных и кончая бытовыми. Спутниковая навигация и связь, управление аэрокосмическим, морским и наземным движением, позиционирование всякого рода объектов, вплоть до отдельного индивидуума, наблюдение за состоянием окружающей среды — всё это стало полем применения таких систем. В результате непрерывно растёт их сложность, расширяются функции, ухудшаются условия эксплуатации, в частности из-за отсутствия квалифицированного обслуживания, и увеличивается цена нештатного функционирования. Последнее влечёт за собой необходимость мониторинга поведения систем, как с целью своевременного обнаружения опасных ситуаций, так и с целью оценки качества выполнения ими своих функций (целостности).

Для мониторинга систем радиолокации и радионавигации широко используются средства функционального диагностирования (ФД), что порождает необходимость решения двух задач: задачи определения характеристик систем со средствами ФД и задачи синтеза таких средств. Обе эти задачи нашли отражение в публикациях последних 30 – 40 лет, в частности, в работах групп П.П. Пархоменко (ИПУ АН), Л.А. Мироновского (СПбГУАП) и А.Н. Жирабка (ДВГТУ) однако, если для первой получены вполне удовлетворительные решения, то для второй их нельзя считать исчерпывающими. Это обусловлено недостаточной общностью теоретических положений в части ФД нелинейных систем и чрезмерной вычислительной сложностью, а часто и невозможностью выполнения следующих из них операций. Опыт решения второй задачи для частных случаев показал, что её обобщение следует искать, понимая задачу ФД конкретных систем, как задачу из области теории динамических систем и предваряя её решение исследованиями общесистемного и математического характера.

Такой подход был принят в диссертационной работе в качестве основного. Её теоретические положения позволили предложить аналитические процедуры синтеза средств ФД, практически не имеющие ограничений по типу объектов диагностирования. Это позволяет их использовать при проектировании разнообразных устройств в радиолокационных и радионавигационных системах с повышенной надёжностью и целостностью как самих систем, так и поставляемой ими информации, из чего следует актуальность диссертационной работы.

Цели и задачи работы. Цель диссертационной работы состоит в разработке основ теории ФД, рассматривающей диагностические задачи с общесистемных позиций, справедливых для любых объектов диагностирования. Единственное свойство, которым должны обладать эти объекты, есть конечномерность, т. е. вектора их входов, состояний и выходов должны иметь конечную размерность. На другие характеристики (линейность, дискретность, континуальность, тип системного времени и т. п.) никаких ограничений не накладывается.

При создании такой теории нужно, во-первых, выбрать общую структуру объектов с ФД, во-вторых, предложить математическую модель такой структуры и, в-третьих, разработать методы синтеза средств диагностирования, реализующих эту модель. В качестве базы для этого используются теория систем, теория решёток и алгебры пар. Часть положений перечисленных математических конструкций требует обобщения в соответствии со спецификой решаемых задач. Другие разделы математики привлекаются по мере необходимости.

Достижение обозначенной цели работы потребовало решения ряда задач как математического, так и прикладного характера. Важнейшие из них суть:

1. Разработка аналитических способов выполнения операций и решения неравенств в решётках разбиений на множествах векторов конечномерных метрических пространств. Минимизации порядка функций, порождающих элементы таких решёток.
2. Обобщение конечных алгебр пар на произвольный случай. Разработка способов вычисления операторов в алгебрах, носители которых суть декартовы произведения решёток разбиений на множествах векторов конечномерных метрических пространств.
3. Определение необходимых и достаточных условий осуществимости ФД динамической системы. Введение алгебр пар, порождаемых объектом диагностирования.
4. Разработка алгебраической модели ФД динамических систем. Вариации модели в соответствии с типом системного времени и формой ФД.
5. Разработка методов синтеза средств диагностирования, реализующих граничные формы алгебраической модели ФД.
6. Разработка методов синтеза средств ФД в промежуточных и канонических формах.

Методы исследования. Для решения поставленных в задач были использованы методы высшей алгебры, математической теории систем, алгебр пар, теории решёток, теории автоматов, булевых алгебр и специальные разделы функционального анализа.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Базовая форма ФД конечномерных динамических систем, её связь с задачей ФД и следующие из этой связи требования к используемым математическим конструкциям.
2. Методы задания элементов первой из используемых конструкций, решёток разбиений, через порождающие функции и предложенные для них способы выполнения решёточных операций и решения решёточных неравенств.
3. Обобщение алгебр пар на континуальный случай, выявленные свойства таких алгебр и способы вычисления основных алгебраических операторов.
4. Системные алгебры пар на объекте диагностирования и свойство квазиподстановки на паре алгебр, связывающей множества состояний континуальных систем.
5. Решение задачи ФД на абстрактном уровне, необходимые и достаточные условия осуществления ФД и условия существования диагностического отображения.
6. Алгебраическая модель ФД динамических систем, каноническая форма её реализации.
7. Предельные варианты реализации алгебраической модели ФД: с помощью контрольной системы в форме функциональной задержки и с помощью гомоморфной контрольной системы, и процедуры синтеза средств диагностирования для них.
8. Варианты реализации алгебраической модели ФД, занимающие промежуточное место между гомоморфной формой и формой функциональной задержки и процедуры синтеза контрольных систем для них.

Научная новизна работы. Научной новизной обладают следующие основные результаты диссертации:

1. Разработанные впервые аналитические способы выполнения операций и оптимального решения неравенств в континуальных и дискретных решётках.

2. Введённые континуальные алгебры пар, для которых предложены способы вычисления операторов, в частности, с помощью специфического предельного перехода.
3. Полная система алгебр пар для объектов с континуальным временем и впервые определенное и исследованное свойство квазиподстановки на паре алгебр, связывающих множества состояний континуальных систем.
4. Обобщенная модель ФД конечномерных динамических систем, результаты её анализа и оптимальные аналитические процедуры реализации модели в предельных формах.
5. Промежуточные формы реализации алгебраической модели ФД и их свойства.
6. Процедуры синтеза средств ФД в промежуточных формах.

Практическая ценность работы. Практическая ценность результатов диссертации состоит в их ориентированности на использование в технических приложениях. Разработанные на основе теоретических исследований процедуры позволяют оптимальным образом синтезировать средства ФД для любых объектов, описываемых моделями конечномерных динамических систем. Кроме того, поскольку большая часть полученных результатов имеет общий характер, их с успехом можно использовать в приложениях теории систем (анализ и синтез систем, поиск декомпозиций, исследование управляемости и наблюдаемости и т. п.).

Внедрение результатов работы. В течение длительного периода теоретические и практические результаты диссертационной работы использовались в ряде хоздоговорных, госбюджетных и правительственных НИР и программ, в частности в целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы» 2009–10 г., разд. 7: «Теоретические основы технологий безопасности движения подвижных объектов» (Подраздел 2.1.2.). Из числа последних по времени можно упомянуть также следующие НИР:

1. «Разработка методов построения отказоустойчивых радиотехнических систем на основе теории технической диагностики», «Исследование и разработка методов построения отказоустойчивых радиотехнических систем» (1991, 1995 г., № гос. рег. 01910052500).
2. «Построение процедур диагностирования цифровых систем методом регрессионного анализа» (1996 г., № гос. рег. 019400010347).
3. «Разработка теоретических основ построения информационно-измерительных комплексов и систем управления для обеспечения безопасности движения воздушных судов» (2009 г., № гос. рег. 01200903630).
4. «Технологическая контрольно-поверочная аппаратура для изделия РСБН-ОВК-2000», шифр «ТКПА-РСБН-2000», 2010 г.

Результаты диссертации используются в дисциплинах учебного процесса СПбГЭТУ «ЛЭТИ» таких, как «Математический аппарат современной радиотехники», «Техническая диагностика динамических систем», «Основы технической диагностики цифровых устройств», и для магистерской подготовки по направлениям «Радиотехника» и «Телекоммуникации».

Апробация работы. Выставляемые на защиту результаты диссертационной работы неоднократно докладывались и обсуждались на конференциях, совещаниях и симпозиумах разного уровня, в числе которых были: IV и VIII симпозиумы по проблемам избыточности в информационных системах (Л., 1974, 1983), II Всесоюзная конференция «Проблемы надежности при проектировании систем управления» (Киев, 1976), Всесоюзная конференция «Логическое управление в промышленности», (Москва, 1977), VI Всесоюзное совещание по технической диагностике (Ростов-на-Дону, 1987), Всесоюзная школа-семинар «Диагностирование, надежность, неразрушающий контроль электронных устройств и систем» (Владивосток, 1990), 45 и 51 НТК ВНТОРЭС им. А. С. Попова, (Л., 1990, СПб., 1996), Международная НТК «Диагностика, информатика и метрология – 95» (СПб., 1995), Международные НТК, «Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность – 96, 97» (СПб., 1996, 1997), Международная научно-практическая конференция «VI Царскосельские чтения» (СПб., 2002), а также многочисленные конференции ППС ЛЭТИ и СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (1974 — 2003) и Постоянно действующий семинары по технической диагностике АН СССР и РАН РФ (рук. Л. А. Мироновский, 1985 – 2010).

Публикации. По теме диссертации имеется 43 публикации, в том числе 19 статей (17 статей в изданиях, включенных в перечень ВАК), 11 работ в материалах международных, всесоюзных и всероссийских научно-технических конференций, 2 монографии, 1 учебник, 3 учебных пособия, получено 6 авторских свидетельств и 1 патент.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и библиографического списка. Она изложена на 298 страницах машинописного текста, содержит 15 рисунков, 5 таблиц, библиографический список включает 127 наименований.

Основное содержание работы

Во **Введении** освещено текущее состояние предмета диссертационной работы, обоснована её актуальность, определены цели и направление исследований, сформулированы решаемые задачи, показана научная новизна и практическая значимость полученных результатов и представлена краткая аннотация диссертации.

В первой главе, во-первых, введено понятие конечномерной динамической системы, во-вторых, рассмотрены ошибки в таких системах, и, в-третьих, строго поставлена задача функционального диагностирования (ФД). На базе математического подобия различных динамических систем формализованы задачи ФД и ряд сопутствующих задач, при этом определены требования к математическому аппарату, ориентированному на их решение.

В результате обоснована целесообразность использования в работе задания объектов диагностирования (динамических систем) в системных пространствах входных воздействий (входов), предысторий (состояний) и выходных реакций (выходов). Всвязи с конечномерностью системных множеств, такого рода системы принято также называть конечномерными. Они всегда представимы по Хаффману, т. е. композицией безынерционного функционального преобразователя **F** и инерционного блока (памяти) **M**. Декомпозиция функционального преобразователя (**F** — совокупность δ и λ) приводит к модифицированному представлению по Хаффману, которое и используется далее в диссертационной работе (рис. 1.1).

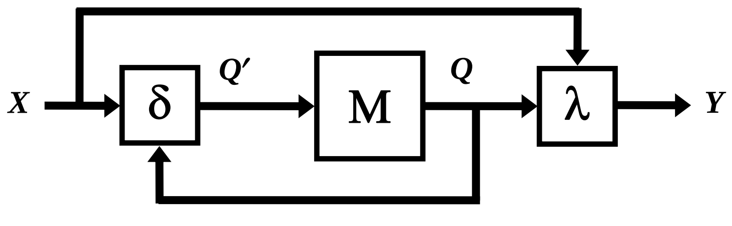


Рис. 1.1. Модифицированное представление по Хаффману

Модификация классического представления по Хаффману позволяет перейти к заданию динамической системы общего вида шестёркой вида $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$, в которой $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ — множества векторов входа, состояний и выхода системы соответственно, $\boldsymbol{Q}'$ — множество векторов входа инерционного блока, а $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ — векторные отображения (функции), причем $\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}'$, $\boldsymbol{\lambda}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Y}$. Если $\boldsymbol{S}$ — система с дискретным временем, то $\boldsymbol{Q}' \subseteq \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{S}$ из шестёрки переходит в пятёрку $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$.

Задание шестёркой (пятёркой) эквивалентно заданию функций $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})$ с областями их определения и значений. Обычно первую из них ($\boldsymbol{\delta}$) называют функцией динамики, или просто динамикой, а вторую ($\boldsymbol{\lambda}$) — функцией выходов системы.

Возможность задания любой системы шестёркой (пятёркой) показывает, что с теоретико-множественных позиций все динамические системы подобны, поэтому при анализе систем как объектов диагностирования целесообразно, прежде всего, выявить общие закономерности, вытекающие из наличия функциональной зависимости между системными множествами, а затем в приложениях изучать конкретные отображения (функции) $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$.

В процессе работы в технических объектах могут возникать физические дефекты, нарушающие функционирование системы, причём они, в конце концов, проявляются как искажения элементов множества $\boldsymbol{Y}$ динамической системы $\boldsymbol{S}$. Достаточно очевидно, что одновременно либо несколько ранее могут исказиться и элементы множеств $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}'$.

Искажения элементов системных множеств принято называть ошибками, в общем случае ошибка задаётся парой элементов, к примеру, замена правильного $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ неправильным $\boldsymbol{y}_O$ — парой $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_O$. Множество всех пар $\{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_O | \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\}$ образует класс ошибок $\boldsymbol{E}_Y$, а множество $\boldsymbol{Y}_O = \{\boldsymbol{y}_O | \ (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_O) \in \boldsymbol{E}_Y\}$ — совокупность ошибочных значений элементов из $\boldsymbol{Y}$.

По аналогии вводятся классы ошибок $\boldsymbol{E}_Q$, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}'}$ и множества $\boldsymbol{Q}_O$, $\boldsymbol{Q}'_O$. В диагностических задачах ошибки в $\boldsymbol{Q}'$ обычно не анализируют, поскольку они всегда приводят к появлению ошибок в $\boldsymbol{Q}$, поэтому под классом ошибок системы обычно понимают $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_Q \cup \boldsymbol{E}_Y$.

Для множеств $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$, представляющих собой множества векторов метрических пространств, вводят вектор ошибки $\boldsymbol{y}_e = \boldsymbol{y}_O - \boldsymbol{y}$, норма которого характеризует её абсолютную величину. Ограничивая норму, можно задать класс ошибок, не прибегая к перечислению всех его элементов. К примеру, если $s < ||\boldsymbol{y}_e|| \le t$, то $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Y}} = \{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_O | \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_O = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}_e, s < ||\boldsymbol{y}_e|| \le t\}$.

В дискретных пространствах норма вектора ошибки равна её кратности, определенной в той же метрике. Так, в пространствах Хэмминга $||\boldsymbol{y}_e|| \le t$ задаёт число несовпадающих компонентов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}_O$, т. е. кратность искажений разрядов.

Для любого класса ошибок можно на соответствующем множестве ввести классы эквивалентности, объединяя в них элементы, не переходящие друг в друга при наличии ошибок. Нетрудно убедиться, что такие классы всегда существуют, их объединение даёт исходное множество, а попарные пересечения неравных пусты, т. е. совокупность всех классов эквивалентности образует на множестве разбиение, блоки которого суть эти классы.

Поскольку из способа образования разбиения следует смена его блока при ошибке, задача её фиксации сводится к проверке факта принадлежности элемента множества «правильному» блоку. При ФД проверка выполняется в реальном времени с помощью вспомогательного устройства, а объект диагностирования продолжает выполнение своих функций. Диагностирующее устройство производит обнаружение ошибок, используя входные воздействия, поступающие на объект, и результаты их преобразования в нём.

В диссертационной работе задача ФД решается применительно к динамическим системам, поскольку предполагается, что объект диагностирования описывается соответствующей конечномерной моделью. Поиск решения производится в классе однотипных систем, т. е. если исходная система непрерывна, то диагностирующая также непрерывна, если исходная — конечный автомат, то и решение задачи ФД даст таковой и т. п.

В процессе решения объект диагностирования $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ не изменяется, причём для его обозначения используются также термины «исходная система», «основная система», «контролируемая система» и просто «система $\boldsymbol{S}$». Неизменность системы $\boldsymbol{S}$ при ФД понимается как неизменность формы её задания.

Обнаружение ошибок в $\boldsymbol{S}$ производится с помощью диагностирующей системы $\boldsymbol{S}_D = (\boldsymbol{X}_D, \boldsymbol{Q}_D, \boldsymbol{Q}'_D, \boldsymbol{Y}_D, \boldsymbol{\delta}_D, \boldsymbol{\lambda}_D)$, которая функционирует совместно с ней и относится к тому же типу. Однотипность $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_D$ влечёт за собой однотипность $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_D$, а необходимость обнаружения ошибок — использование выхода первой в качестве компонента входа второй. В простейшем случае $\boldsymbol{X}_D = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, а выходом $\boldsymbol{S}_D$ является сигнал ошибки ε, откуда следует форма организации ФД, включающая в себя системы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_D$ с соответствующими связями (рис. 1.2).

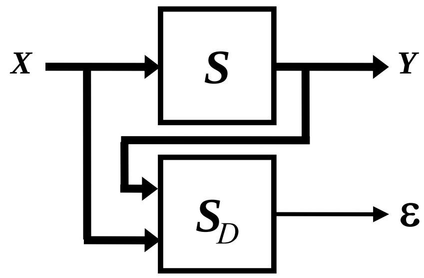


Рис. 1.2. Форма ФД системы $\boldsymbol{S}$ *с помощью диагностирующей системы* $\boldsymbol{S}_D$

В такой форме система $\boldsymbol{S}_D$ должна работать согласованно с $\boldsymbol{S}$, постоянно анализируя её выход. Обычно при анализе выход $\boldsymbol{S}$ предварительно преобразуется, а полученный результат явно или неявно сравнивается с эталоном. Эталон для сравнения формируется в $\boldsymbol{S}_D$, результат сравнения используется либо для преобразования в ε, либо для обеспечения перехода $\boldsymbol{S}_D$ в тупиковое состояние, соответствующее наличию ошибки в $\boldsymbol{S}$. Диагностические системы с тупиковым состоянием в рассматриваемой работе не используются, примером же $\boldsymbol{S}_D$ без него может служить совокупность контрольной системы $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ и дискриминатора ошибок $\boldsymbol{D}$. Выход $\boldsymbol{S}_K$ используется как эталон, а $\boldsymbol{D}$ представляет собой безынерционный функциональный преобразователь. Система $\boldsymbol{S}$ совместно с $\boldsymbol{S}_K$ и $\boldsymbol{D}$ образуют форму ФД, в которой динамические системы связаны отношением гомоморфизма (рис. 1.3).

Задача ФД динамических систем в формах вида рис. 1.2 и 1.3 неоднократно рассматривалась в литературе, однако в большинстве случаев обнаружение ошибок предполагалось лишь в системе $\boldsymbol{S}$, а задача контроля $\boldsymbol{S}_D$ даже не ставилась из-за малой вероятности ошибок в ней. Такое предположение неверно: объем $\boldsymbol{S}_D$ обычно составляет не менее трети от объема $\boldsymbol{S}$, и пренебрегать её ошибками нельзя. В диссертационной работе предполагается, что при ФД обнаруживаются ошибки в обеих системах, причём структура системы, принятая в качестве отправной точки исследований, строится путём трансформации гомоморфной формы.

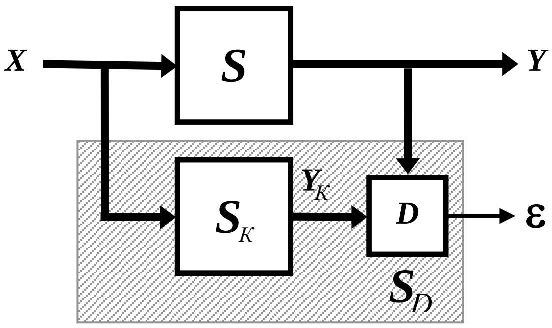


Рис. 1.3. Форма ФД системы $\boldsymbol{S}$ *при представлении* $\boldsymbol{S}_D$ *совокупностью из* $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ *и дискриминатора ошибки* $\boldsymbol{D}$

Целесообразность трансформации обусловлена двумя причинами. Первая состоит в том, что при гомоморфизме имеются трудности в обнаружении ошибок в состояниях $\boldsymbol{S}$, вторая — в частой сходимости решения задачи ФД к дублированию. В результате преобразований в реферируемой работе получена структура, названная базовой формой ФД (рис. 1.4).

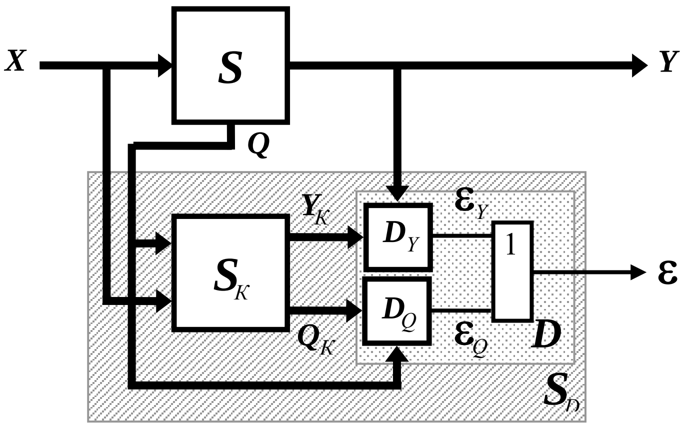


Рис. 1.4. Базовая форма ФД системы $\boldsymbol{S}$ *с помощью системы* $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ *и составного дискриминатора ошибок* $\boldsymbol{D}$

В ней легко обнаруживаются ошибки как в состояниях, так и в выходах $\boldsymbol{S}$ и сохранены максимальные возможности упрощения $\boldsymbol{S}_K$. Все формы (модели) ФД, в которых обнаружение ошибок производится путём сравнения преобразованных векторов из $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Q}$ системы $\boldsymbol{S}$ с векторами $\boldsymbol{Q}_K$ и $\boldsymbol{Y}_K$, суть частные случаи базовой формы. Входящая в неё контрольная система $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ определяет состояния и выходы системы $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ с точностью, достаточной для обнаружения ошибок класса $\boldsymbol{E}$, причём системные множества $\boldsymbol{S}_K$ таковы, что $\boldsymbol{X}_K \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}$, $\#\boldsymbol{Q}_K \le \#\boldsymbol{Q}$, $\#\boldsymbol{Q}'_K \le \#\boldsymbol{Q}'$ и $\#\boldsymbol{Y}_K \le \#\boldsymbol{Y}$. В конечномерном случае из этих неравенств следует, что порядок $\boldsymbol{S}_K$ не превышает порядка $\boldsymbol{S}$.

Дискриминатор ошибок $\boldsymbol{D}$ в базовой форме есть функциональный преобразователь, осуществляющий отображение $\boldsymbol{R}$ декартового произведения $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q}_K \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y}_K$ на выход диагностирующей системы $\boldsymbol{Y}_D = \{\varepsilon\}$, путем сравнения элементов из $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ с элементами из $\boldsymbol{Q}_K$ и $\boldsymbol{Y}_K$, причём $\boldsymbol{R}\colon \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}_K\times\boldsymbol{Y}\times\times\boldsymbol{Y}_K\to\{\varepsilon\}$ так, что $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_Q\vee\boldsymbol{r}_Y$, где $\boldsymbol{r}_Q\colon\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}_K\to\{\varepsilon_Q\}$, и $\boldsymbol{r}_Y\colon\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{Y}_K\to\{\varepsilon_Y\}$.

В базовой форме практически мгновенно обнаруживаются ошибки заданного класса в объекте диагностирования и произвольные ошибки в $\boldsymbol{S}_K$ в соответствии со строгой постановкой задачи ФД. Последняя состоит в следующем.

Пусть заданы система $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})$ и класс её ошибок $\boldsymbol{E}$. Найти для неё приведённую (минимальную по порядку) контрольную систему $\boldsymbol{S}_K=(\boldsymbol{X}_K,\boldsymbol{Q}_K,\boldsymbol{Q}'_K,\boldsymbol{Y}_K,\boldsymbol{\delta}_K,\boldsymbol{\lambda}_K)$ и дискриминатор ошибок $\boldsymbol{D}$ так, чтобы при локализации нарушений в пределах одного блока в совокупности из $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_K$ и $\boldsymbol{D}$ (рис. 1.4) обнаруживались, во-первых, ошибки из $\boldsymbol{E}$ в системе $\boldsymbol{S}$, во-вторых, произвольные ошибки в $\boldsymbol{S}_K$ и, в-третьих, ошибки в дискриминаторе $\boldsymbol{D}$. Фиксация ошибок в $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ происходит в момент первого искажения элементов системных множеств, а в $\boldsymbol{D}$ — со скоростью, определяемой быстродействием функциональных преобразователей.

Во второй главе, отмечено, что в процессе ФД приходится анализировать движение объекта диагностирования по блокам разбиений, порождённых отображениями $\boldsymbol{r}_Q$ и $\boldsymbol{r}_Y$ на его системных множествах, для чего можно использовать предложенные Хартманисом и Стирнсом алгебры пар, при условии их обобщения. Практическое применение алгебр ограничено сложностью вычислительных процедур, более того, для континуального случая они до сих пор не были известны. Это обусловило появление в реферируемой работе второй главы, в которой исследованы множества, образующие носители упомянутых алгебр и именуемые полными решётками. В результате введены решётки, ориентированные на использование в приложениях к ФД, и предложен ряд эффективных вычислительных процедур.

Как известно, полная решётка есть пара $\boldsymbol{L}=(\mathfrak{V},\geq)$, состоящая из частично упорядоченного множества $\mathfrak{V}$ и отношения порядка «$\geq$», причём $\forall\mathfrak{V}^*\subseteq\mathfrak{V}$, $\exists\mathfrak{v}_S$, $\mathfrak{v}_I\in\mathfrak{V}$, такие, что $\forall\mathfrak{v}\in\mathfrak{V}^*$, $\mathfrak{v}_S\geq\mathfrak{v}\geq\mathfrak{v}_I$, и нет элементов $\mathfrak{v}_{SS}$, $\mathfrak{v}_{II}\in\mathfrak{V}$, связанных с $\mathfrak{v}_S$, $\mathfrak{v}_I$ и $\mathfrak{v}$ неравенством $\mathfrak{v}_S>\mathfrak{v}_{SS}\geq\mathfrak{v}\geq$ $\geq\mathfrak{v}_{II}>\mathfrak{v}_I$. Элементы $\mathfrak{v}_S$ и $\mathfrak{v}_I$ называют точными верхней и нижней границами $\mathfrak{V}^*$ в решётке $\boldsymbol{L}$, обозначают их символами $\sup\mathfrak{V}^*$ и $\inf\mathfrak{V}^*$, а единственную пару $\sup\mathfrak{V}$ и $\inf\mathfrak{V}$, для которой $\forall\mathfrak{v}\in\mathfrak{V}$, справедливо неравенство $\sup\mathfrak{V}\geq\mathfrak{v}\geq\inf\mathfrak{V}$, считают единицей ($\mathbf{1}$) и нулём ($\mathbf{0}$) $\boldsymbol{L}$.

В любой решётке $\boldsymbol{L}=(\mathfrak{V},\geq)$ определены операции «$+$» и «$\cdot$», для которых $\forall\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2\in\mathfrak{V}$, справедливы равенства $\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2=\sup\{\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2\}$ и $\mathfrak{v}_1\cdot\mathfrak{v}_2=\inf\{\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2\}$. Эти операции однозначно связаны с отношением $\geq$, замкнуты на множестве $\mathfrak{V}$ и обладают свойствами идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и поглощения. Упомянутая связь такова, что $\forall\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2\in\mathfrak{V}$ из $\mathfrak{v}_1\geq\mathfrak{v}_2$ следует $\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2=\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2=\mathfrak{v}_2$ и обратно. Последнее приводит к соотношениям вида $\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{v}_i=\sup\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{v}_i$, $\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{v}_i=\inf\bigcup_{i=1}^{k}\mathfrak{v}_i$, и позволяет задавать решётку тройкой $\boldsymbol{L}=(\mathfrak{V},\cdot,+)$.

Элементы решёток могут образовывать неравенства, в частности, в задачах ФД приходится решать относительно $\mathfrak{v}$ неравенства вида:

$$\mathfrak{v}_1\geq\mathfrak{v}\mathfrak{v}_2 \text{ и } \mathfrak{v}+\mathfrak{v}_1\geq\mathfrak{v}_2. \tag{2.2}$$

Решётки в приложениях к ФД состоят из элементов, образованных из компонентов системных множеств динамических систем, что позволило автору определить их как решётки с ассоциированной эквивалентностью на базисном множестве. Так, если таковое есть $\boldsymbol{X}$, то в соответствующей $\boldsymbol{L}=(\mathfrak{V},\cdot,+)$, $\forall\mathfrak{v}\in\mathfrak{V}$, определено отношение эквивалентности «$\equiv$» на

$\boldsymbol{X}_{\mathfrak{v}} \subseteq \boldsymbol{X}$, и $\bigcup_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{X}_{\mathfrak{v}} = \boldsymbol{X}$. Примером решёток с ассоциированной эквивалентностью могут служить решётки всех разбиений на множестве.

Главным препятствием, ограничивающим использование решёток в приложениях, является сложность выполнения решёточных операций, так как для конечных решёток вычислительные алгоритмы носят переборный характер, а для бесконечных вообще отсутствуют. В реферируемой работе предложены способы преодоления этих препятствий. Для этого, прежде всего, введены функции, порождающие разбиения. В n-мерном континуальном пространстве $\boldsymbol{X}$ такая функция есть функция n аргументов, определённая во всех его точках. Действительно, $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ однозначно связывает точки пространства и действительные числа, т. е. f: $(R^n = \times_{i=1}^{n} X_i) \to R$, где X_i — множество точек i-й координатной оси. Блоки соответствующего разбиения определятся как совокупности точек, координаты которых суть решения уравнений вида $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \mathrm{const} \in R$.

Задание разбиений порождающими функциями позволило разработать аналитические методы выполнения решёточных операций. К примеру, блоки произведения разбиений $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$ суть всевозможные непустые попарные пересечения блоков сомножителей, но каждое из них есть множество совместных решений уравнений $v_1(x_1, \dots, x_n) = a$ и $v_2(x_1, \dots, x_n) = b$, где a и b — константы, $v_1(x_1, \dots, x_n)$ и $v_2(x_1, \dots, x_n)$ — функции, порождающие $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ соответственно. Из последнего следует, что функция, порождающая $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$, есть векторная функция $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \{v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x})\}$, причём $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}^2$, т. е. n-мерное пространство отображается в двухмерное.

Функция, порождающая $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{v}_i$, есть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \{v_1(\boldsymbol{x}), \dots, v_i(\boldsymbol{x}), \dots, v_k(\boldsymbol{x})\}$, причём в этом случае $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}^k$. Если сомножители порождены многомерными функциями, то $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ содержит все их компоненты, её размерность $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, где m_i — размерность $\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x})$, и $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}^m$.

Функция, порождающая разбиение, особенно произведение разбиений, в общем случае определяется неоднозначно и часто допускает преобразование в функцию меньшей размерности. В реферируемой работе показано, что для существования такого преобразования необходимо и достаточно функциональной зависимости хотя бы одного компонента $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \{v_1(\boldsymbol{x}), \dots, v_i(\boldsymbol{x}), \dots, v_m(\boldsymbol{x})\}$ от остальных. Выявить такую зависимость можно, анализируя поведение её матрицы Якоби $\mathbf{J}_{\boldsymbol{v}}$ во всех точках пространства, поскольку по теореме Кронекера – Капели избыточность имеет место тогда и только тогда, когда исключение некоторых строк из $\mathbf{J}_{\boldsymbol{v}}$ не изменяет её ранга. Избыточные компоненты соответствуют строкам с таким свойством, а число функционально независимых компонентов $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ равно рангу матрицы $\mathbf{J}_{\boldsymbol{v}}$.

Помимо выявления избыточности, с помощью матриц Якоби можно решить задачу сравнения разбиений. Показано, что справедливость во всех точках пространства $\boldsymbol{X}$ соотношения $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1} \leq \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}2} = \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v}2}$, где $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1}$, $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}2}$ и $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v}2}$ — ранги матриц Якоби функций, порождающих $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$ соответственно, влечёт за собой выполнение неравенства $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}_2$ и обратно. Кроме того, равенство $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1} = \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}2} = \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v}2}$ справедливо во всех точках $\boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$, а совместности неравенств $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v}2} > \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1}$ и $\operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v}2} > \operatorname{rank} \mathbf{J}_{\boldsymbol{v}2}$ хотя бы в одной точке пространства необходимо и достаточно для несравнимости $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, и повсеместная справедливость соотношения $\operatorname{rank}\mathbf{J}_{v1} < \operatorname{rank}\mathbf{J}_{v2} = \operatorname{rank}\mathbf{J}_{v1v2}$ влечёт за собой выполнение точного неравенства $\mathfrak{v}_1 > \mathfrak{v}_2$ и обратно.

Функцию, порождающую сумму разбиений, найти гораздо сложнее. Проще всего это сделать в случае сравнимости слагаемых. Так, если $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}_2$, то $\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \div (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2)$, совпадает с $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) \div \mathfrak{v}_1$. Из транзитивности $\geq$ следует равенство суммы любого числа сравнимых разбиений наибольшему из них, а искомой функции — функции, порождающей последнее.

В случае несравнимых разбиений для их суммирования приходится использовать цепочечный алгоритм, сходимость которого в континуальном случае не гарантирована.

Положения, использованные для выполнения операций в континуальных решётках, имеют общий характер, в случае конечных решёток они видоизменяются, кроме того, используемые математические объекты приобретают ряд новых свойств. Из них в первую очередь следует отметить возможность задания разбиений в явной форме списком блоков, а блоков — списком элементов. Такое задание позволяет для выполнения решёточных операций использовать переборные алгоритмы, которые сходятся за конечное число шагов, но достаточно трудоёмки. Упростить вычисления можно по аналогии с континуальным случаем, задав разбиения порождающими функциями. В большинстве приложений базисные множества суть множества точек пространств Хэмминга, а упомянутые функции — системы булевых функций, поэтому в процессе исследований основное внимание уделено именно ним.

Векторные булевы функции, определённые на n-мерном пространстве Хэмминга, и разбиения на нём связаны однозначным соответствием: каждая функция порождает одно разбиение, но для любого разбиения можно указать семейство функций, его порождающих. В этом семействе наиболее интересны подсемейство функций минимальной размерности (порядка) и характеристические функции вида $\boldsymbol{v}_{ch}(\boldsymbol{x}) = \{v_1(\boldsymbol{x}),..., v_m(\boldsymbol{x})\}$ с вектором аргументов $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots , x_n) \in \boldsymbol{X}$. Порядок $\boldsymbol{v}_{ch}(\boldsymbol{x}) \div \mathfrak{v}$ равен числу блоков разбиения $\mathfrak{v}$, попарные логические произведения её компонентов тождественно равны 0, и каждому блоку $\mathfrak{v}$ соответствует компонент $\boldsymbol{v}_{ch}(\boldsymbol{x})$, принимающий единичное значение на всех входящих в него векторах.

Для конечных решёток в приложениях приходится решать задачи, подобные рассмотренным для континуальных. Первая из них, задача перемножения разбиений, решается просто: функция, порождающая произведение разбиений, есть простая композиция компонентов порождающих функций сомножителей. Поскольку она часто оказывается избыточной, приобретает актуальность вторая задача: задача минимизации размерности функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Первый шаг её решения состоит в выявлении избыточных компонентов $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, для чего в реферируемой работе предложены три способа. Два из них носят переборный характер, первый предполагает переход к заданию разбиений списком, второй требует анализа таблицы истинности вспомогательного логического $m \times n$-полюсника, задающего компоненты $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

Третий способ, представляющий наибольший интерес, основан на переходе от булевых функций к непрерывным в соответствии с соотношениями вида $a = a^k$, $\overline{a} = 1 - a$, $a \& b = ab$, $a \vee b = a + b - ab$, и $a \oplus b = a + b - 2ab$. Значения исходных и преобразованных функций в точках определения первых совпадают, а решаемая задача сводится к ранее рассмотренной задаче минимизации размерности континуальных функций. В реферируемой работе доказана теорема, подтверждающая корректность такого подхода.

Получив порождающую функцию k-блочного разбиения, состоящую из взаимно независимых компонентов, можно уменьшить её размерность до минимума (min = $]\log_2 k[$). Для этого достаточно закодировать минимальным двоичным кодом вектора вида $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$, соответствующие полученной функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \{v_1(\boldsymbol{x}), \dots, v_i(\boldsymbol{x}), \dots, v_m(\boldsymbol{x})\}$, после чего, считая разряды минимального кода значениями новых компонентов $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, а составляющие вектора $\boldsymbol{v}$ — сложными аргументами, синтезировать их. Искомая $\boldsymbol{v}_{\min}(\boldsymbol{x})$ состоит из этих компонентов.

Если сомножители в произведении разбиений заданы характеристическими функциями в пространствах Хэмминга, то характеристическую функцию произведения можно определить непосредственно по ним. Вычисление для двух сомножителей $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ сводится к выявлению всех неравных тождественно нулю элементов во всевозможных логических произведениях вида $v_{1i}(\boldsymbol{x})v_{2j}(\boldsymbol{x})$, где $v_{1i}(\boldsymbol{x})$ и $v_{2j}(\boldsymbol{x})$ — i-й и j-й компоненты $\boldsymbol{v}_{ch1}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}_{ch2}(\boldsymbol{x})$ соответственно. Искомая характеристическая функция $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$ есть композиция выявленных элементов.

Третья задача — сравнение разбиений в пространствах Хэмминга, как и в континуальном случае, базируется на использовании соотношения $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2$. Из него следует, что в объединении компонентов порождающих функций сравнимых разбиений все компоненты, соответствующие большему, избыточны. При равенстве разбиений из объединения с равным успехом можно исключить все компоненты, задающие любое из них. При несравнимости разбиений в нём же после преобразования к безызбыточному виду останется хотя бы по одному компоненту функций, соответствующих каждому из сравниваемых разбиений.

Четвёртая задача, способ решения которой дан в диссертационной работе, есть задача сложения разбиений. Её вычислительная сложность выше, чем перемножения, однако, в отличие от континуального случая, в пространствах Хэмминга по характеристическим функциям слагаемых всегда можно найти характеристическую функцию суммы $\boldsymbol{v}_{ch\Sigma}(\boldsymbol{x})$. В реферируемой работе на базе известного цепочечного алгоритма разработана процедура сложения таких разбиений. Процедура сходится к искомой функции суммы двух разбиений, причём главным её преимуществом по сравнению с ранее известными процедурами является меньшая вычислительная сложность. Показано, что при сложении k-блочного и l-блочного разбиений на множестве векторов n-мерного пространства Хэмминга выигрыш по числу операций превышает отношение $2^{2^n}/kl$, т. е. при большой размерности пространств весьма велик.

Завершается вторая глава рассмотрением задачи поиска наибольшего решения решёточных неравенств вида $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}\mathfrak{v}_2$ относительно $\mathfrak{v}$. Показано, что $\mathfrak{v}$ определяется неоднозначно, однако все максимальные решения неравенства равномощны и с теоретико-множественных позиций равносильны. Для случая задания $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ характеристическими функциями предложена аналитическая процедура оптимального решения неравенств, в основу которой положена приведённая выше процедура сложения разбиений.

В счётных и континуальных решетках, решение неравенства $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}\mathfrak{v}_2$ сильно усложняется, так как тривиальный результат вида $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1$ редко удовлетворяет критериям оптимизации. Если оптимально решение, минимизирующее число компонентов $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \div \mathfrak{v}$ при выполнении условия $\mathfrak{v} \geq \mathfrak{v}_1$, то процедуру поиска $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ можно свести к минимизации размерности функции $\{\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x})\}$, индуцирующей произведение $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$, с последующим исключением из неё компонентов $\mathfrak{v}_2$. Дополнительное условие, наложенное на $\mathfrak{v}$, ограничивает множество возможных решений и, как следствие, не гарантирует абсолютной минимальности результата, его введение окупается простотой полученной процедуры.

В третьей главе полные решётки используются для создания более сложных математических конструкций, обобщающих алгебры пар Хартманиса и Стирнса. Особое внимание уделено установлению связи алгебр и динамических систем, а также вопросу сходимости алгоритмов вычисления алгебраических операторов.

Определение 3.1. Пусть $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ — произвольные полные решётки, и определено некоторое множество пар $\mathfrak{D} \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$, тогда математический объект, задаваемый совокупностью $\mathfrak{D}$ и решёточных операций $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, есть алгебра пар Δ в том и только том случае, в котором выполняются два следующих постулата:

1. Если $(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1)$ и $(\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2) \in \Delta$, то $(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2) \in \Delta$ и $(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2) \in \Delta$.
2. $\forall \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, $(\mathfrak{v}, \mathfrak{1}) \in \Delta$ и $(\mathfrak{0}, \mathfrak{w}) \in \Delta$.

Подмножество $\mathfrak{D}$ есть носитель алгебры пар Δ, в него обязательно входят все пары вида $(\mathfrak{v}, \mathfrak{1})$ и $(\mathfrak{0}, \mathfrak{w})$. Отличие алгебры, введённой определёнием 3.1, от ранее известных заключается в том, что её носитель в общем случае континуален. Так как ограничения, наложенные определением на способ формирования $\Delta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$, довольно слабы, на одном и том же декартовом произведении можно задать несколько алгебр пар с различными носителями.

Используя определение 3.1 нетрудно убедиться, что $\forall \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$ существуют несколько таких элементов $\mathfrak{w}^* \in \boldsymbol{L}_2$, что $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}^*) \in \Delta$, причём минимальный из них есть $\mathbf{m}(\mathfrak{v}) = \inf(\mathfrak{W}^* = \{\mathfrak{w}^* | (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}^*) \in \Delta\})$.По аналогии $\forall \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$ определяется максимальный элемент в $\boldsymbol{L}_1$, входящий в алгебру совместно с $\mathfrak{w}$: $\mathbf{M}(\mathfrak{w}) = \sup(\mathfrak{V}^* = \{\mathfrak{v}^* | (\mathfrak{v}^*, \mathfrak{w}) \in \Delta\})$. В счётном случае введённые операторы преобразуются в $\mathbf{m}(\mathfrak{v}) = \prod_{\mathfrak{W}^*} \mathfrak{w}_j$, и $\mathbf{M}(\mathfrak{w}) = \sum_{\mathfrak{V}^*} \mathfrak{v}_i$, где $\prod$ и $\sum$ — символы многократного выполнения операций, в континуальном — равенства понимаются как пределы произведений и сумм счётного числа элементов при бесконечном приближении последних друг к другу.

Операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ имеют 12 специфических свойств, установленных основной теоремой алгебры пар, ниже приведены лишь используемые в приложениях к ФД.

Теорема 3.1. Если $\Delta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$ — алгебра пар, то:

1. $\forall \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \in \boldsymbol{L}_1$, из $\mathfrak{v}_1 \geq \mathfrak{v}_2$ следует, что $\mathbf{m}(\mathfrak{v}_1) \geq \mathbf{m}(\mathfrak{v}_2)$.
2. $\forall \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$, из $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in \Delta$ следует, что $\mathfrak{w} \geq \mathbf{m}(\mathfrak{v})$ и обратно.
3. $\forall \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in \boldsymbol{L}_2$, из $\mathfrak{w}_1 \geq \mathfrak{w}_2$ следует, что $\mathbf{M}(\mathfrak{w}_1) \geq \mathbf{M}(\mathfrak{w}_2)$.
4. $\mathbf{M}(\mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2) = \mathbf{M}(\mathfrak{w}_1)\mathbf{M}(\mathfrak{w}_2)$.
5. $\forall \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, из $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in \Delta$ следует, что $\mathbf{M}(\mathfrak{w}) \geq \mathfrak{v}$ и обратно.

Частным случаем алгебр пар является алгебра, носитель которой есть подмножество декартового произведения некоторой решётки на саму себя, т. е. $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$. Для такой алгебре определено свойство подстановки (СП) как способность $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$, образовать пару $(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) \in \Delta$.

Поскольку $(\mathfrak{0}, \mathfrak{0}) \in \Delta$ и $(\mathfrak{1}, \mathfrak{1}) \in \Delta$, $\mathfrak{0}$ и $\mathfrak{1} \in \boldsymbol{L}$ имеют СП на любой алгебре $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$.

СП у некоторого $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$ на $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо хотя бы одно неравенство из пары $\mathfrak{v} \geq \mathbf{m}(\mathfrak{v})$, $\mathbf{M}(\mathfrak{v}) \geq \mathfrak{v}$.

В приложениях часто требуется найти в $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ СП-разбиение, ближайшее к $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$. В реферируемой работе показано, что таких разбиений два: ближайшее снизу $\mathfrak{s}(\mathfrak{v}) = \sup\{\mathfrak{v}_{\text{сп}} | \mathfrak{v}_{\text{сп}} \in \boldsymbol{L},\ \mathfrak{v} \geq \mathfrak{v}_{\text{сп}}\}$ и ближайшее сверху $\mathfrak{i}(\mathfrak{v}) = \inf\{\mathfrak{v}^*_{\text{сп}} | \mathfrak{v}^*_{\text{сп}} \in \boldsymbol{L},\ \mathfrak{v}^*_{\text{сп}} \geq \mathfrak{v}\}$, причём $\mathfrak{i}(\mathfrak{v}) \geq \mathfrak{v} \geq \mathfrak{s}(\mathfrak{v})$; при наличии СП у разбиения $\mathfrak{v}$ последнее соотношение переходит в равенство.

Способ вычисления $\mathfrak{s}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}(\mathfrak{v})$ следует из положений следующей теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ — алгебра пар, $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$, и существуют такие натуральные k и t, что справедливы два равенства: $\prod_{i=0}^{k} \mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v}) = \prod_{i=0}^{k+1} \mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v})$ и $\sum_{i=0}^{t} \mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v}) = \sum_{i=0}^{t+1} \mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v})$, в которых $\mathbf{M}^{(0)}(\mathfrak{v}) = \mathbf{m}^{(0)}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}$, $\mathbf{M}^{(1)}(\mathfrak{v}) = \mathbf{M}(\mathfrak{v})$, $\mathbf{m}^{(1)}(\mathfrak{v}) = \mathbf{m}(\mathfrak{v})$, $\mathbf{M}^{(i+1)}(\mathfrak{v}) = \mathbf{M}[\mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v})]$ и $\mathbf{m}^{(i+1)}(\mathfrak{v}) = \mathbf{m}[\mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v})]$, тогда искомые элементы решётки $\boldsymbol{L}$ суть $\mathfrak{s}(\mathfrak{v}) = \prod_{i=0}^{k} \mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}(\mathfrak{v}) = \sum_{i=0}^{t} \mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v})$.

По теореме 3.2 вычисление $\mathfrak{s}_j(\mathfrak{v}) = \prod_{i=0}^{j} \mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}_j(\mathfrak{v}) = \sum_{i=0}^{j} \mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v})$, дополненное сравнением $\mathfrak{s}_j(\mathfrak{v})$ с $\mathfrak{s}_{j-1}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}_j(\mathfrak{v})$ с $\mathfrak{i}_{j-1}(\mathfrak{v})$ на каждом шаге, позволяет найти $\mathfrak{s}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}(\mathfrak{v})$.

Использование введённых абстрактных алгебр пар для решения прикладных задач затруднительно из-за отсутствия явной связи алгебр с объектами приложения. Установить такую связь можно, используя предложенный автором математический объект: решётки, связанные по отображению. Он образован парой решёток $[\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +); \boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)]$ с ассоциированными эквивалентностями на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, для которой определено отображение $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ со следующими свойствами: $\forall \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$, $\exists \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, и $\forall \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, $\exists \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$, такие, что из $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})$ следует $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)(\mathfrak{w})$. В реферируемой работе установлено, что решётки с ассоциированной эквивалентностью и алгебры пар суть взаимосвязанные конструкции.

Теорема 3.3. Пусть $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ — решётки с ассоциированными эквивалентностями на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, тогда для существования алгебры пар $\Delta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$, необходимо и достаточно связности этих решёток по некоторому отображению $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

При доказательстве необходимости условий теоремы 3.3 показано, как для любой алгебры пар на декартовом произведении решёток с ассоциированными эквивалентностями задаётся отображение, связывающее их. Доказательство достаточности конструктивно, так как позволяет по заданному отображению построить алгебру, им порождённую.

Три решётки $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$, $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{U}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_3 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ с ассоциированными эквивалентностями на $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, также можно связать по отображению $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Y}$, при этом $\forall \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$, $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}_2$, $\exists \mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2 \in \boldsymbol{L}_3$, и $\forall \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_3$, $\exists \mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}_1$, $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}_2$, такие, что $\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}$, из $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})$ следует $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{q})(\mathfrak{w}_1)$; $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, из $\boldsymbol{q}_1 \equiv \boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u})$ следует $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{w}_2)$; $\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}$, из $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})$ следует $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{q})(\mathfrak{w})$, и $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, из $\boldsymbol{q}_1 \equiv \boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u})$ следует $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{w})$. В соответствии с нижеследующей теоремой на этих решётках задаются две алгебры пар.

Теорема 3.4. Если $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$, $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{U}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_3 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ — решётки с ассоциированными эквивалентностями на $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$, то для существования алгебр пар $\Delta_{xy} \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_3$, и $\Delta_{qy} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_3$, необходимо и достаточно их связности по отображению $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Y}$.

Теорема 3.4 доказывается по аналогии с теоремой 3.3.

Алгебры, определённые теоремой 3.3, суть $\Delta_{xy} = \{(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) | (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \in \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_3,\ \forall \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v}) \Rightarrow \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{q})(\mathfrak{w})\}$ и $\Delta_{qy} = \{(\mathfrak{u}, \mathfrak{w}) | (\mathfrak{u}, \mathfrak{w}) \in \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_3,\ \forall \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2 \in \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}_1 \equiv \boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u}) \Rightarrow \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{w})\}$.

В диссертационной работе в качестве решёток с ассоциированными эквивалентностями $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ и $\boldsymbol{L}_3$ используются решётки разбиений. В этом случае $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ суть множества всех разбиений на базисных множествах $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, и для каждого из них эквивалентность элементов по некоторому разбиению влечёт за собой равенство значений соответствующих порождающих функций и обратно. Это позволяет преобразовать условие связности по отображению $\boldsymbol{h}$ для двух решёток к виду $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_2) \Rightarrow \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1)] = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)]$, а для трёх — к виду $\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_2) \Rightarrow \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{q})]$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}_1) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}_2) \Rightarrow \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1)] = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)]$, где $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ — отображения, порождающие разбиения $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{w}$ на $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$.

Справедливость первого соотношения есть обходимое и достаточное условие вхождения $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ в алгебру $\Delta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$, а двух других — $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ и $(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})$ в $\Delta_{xy} \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_3$ и $\Delta_{qy} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_3$.

Выбрав $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, можно для $\Delta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$ определить составное отображение $\boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$, задающее два равномощных разбиения: $\mathfrak{w}$ на $\boldsymbol{Y}$ и $\mathfrak{v}$ на $\boldsymbol{X}$, причём $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$. В реферируемой работе показано, что такое $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$, есть $\mathbf{M}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$, где под $\mathfrak{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$ понимается разбиение, порождённое сложным отображением $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$, для которого $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$, Тем самым определён аналитический способ вычисления оператора **M.**

В алгебрах пар, порожденных отображением, связывающим три решётки, операторы типа $\mathbf{M}$ также вычисляются аналитически: $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}) = \prod_{\boldsymbol{Q}} \mathfrak{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$; $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}) = \prod_{\boldsymbol{X}} \mathfrak{w}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$

Если среди связанных по отображению решёток имеется пара равных, то для случая двух решёток $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, для трех — $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$, и условия теорем 3.3 и 3.4 зададут алгебры пар $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ (первое) и $\Delta_{qq} \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ (второе) со свойством подстановки. Для этих алгебр в случае решёток разбиений необходимые и достаточные условия наличия СП у $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$ (в Δ) и $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}$ (в Δ_{qq}) сведутся к выполнению неравенств вида $\mathfrak{v}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})] \geq \mathfrak{v}$, и $\prod_{\boldsymbol{X}} \mathfrak{u}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] \geq \mathfrak{u}$.

Ценой сужения класса СП-разбиений эти неравенства можно превратить в равенства, что позволит проверять вместо них одно из двух условий: $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$; $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{u}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$. Конечно, эти условия несколько избыточны, однако их использование оправдывается простотой. Для решёток разбиений на элементах конечномерных пространств в реферируемой работе найдены безызбыточные условия.

Полученные формулы для вычисления мультипликативных алгебраических операторов имеют общий характер и, если $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ суть множества векторов конечномерных метрических пространств, изменяются, так как при этом отображения переходят в функции, что упрощает вычисления. В случае двух решёток $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ — решётки разбиений на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, которые суть множества векторов размерности n и m, а $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ — векторная функция, связывающая $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$. Функция $\boldsymbol{f}$ порождает на $\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_2$ алгебру пар Δ, в которой $\forall \mathfrak{w} \in \boldsymbol{L}_2$, $\mathbf{M}(\mathfrak{w}) \in \boldsymbol{L}_1$ индуцируется функцией $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$. Так как $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \{f_1(x_1, ..., x_n), ...,$

$f_m(x_1, ..., x_n)\}$ и $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y}) = \{w_1(y_1, ..., y_m), ..., w_r(y_1, ..., y_m)\}$, её можно представить в виде

$$\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}(\boldsymbol{x}) = \{w_1[f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)], \ldots, w_r[f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)]\}, \qquad (3.1)$$

справедливом для любых пространств определённого выше типа.

В случае трёх решёток функция связности есть $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ — множества векторов размерности n, m и k, порождённые ею алгебры суть $\Delta_{xy} \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_3$ и $\Delta_{qy} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_3$, где $\boldsymbol{L}_1 = (\mathfrak{V}, \cdot, +)$, $\boldsymbol{L}_2 = (\mathfrak{U}, \cdot, +)$ и $\boldsymbol{L}_3 = (\mathfrak{W}, \cdot, +)$ — решётки разбиений на $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$. Поскольку эти алгебры образуются по теореме 3.4, $\forall \mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$ для первой алгебры определено $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}) = \prod_{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}} \mathfrak{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] \in \mathfrak{V}$, а для второй — $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}) = \prod_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \mathfrak{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] \in \mathfrak{U}$, и в случае пространств Хэмминга порождающие их функции суть

$$\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{xy}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_0)], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_{2^m-1})]\},$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{qy}(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{q})], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{2^n-1}, \boldsymbol{q})]\}; \qquad (3.2)$$

где $\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)] = \{w_1[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)], ..., w_r[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)]\}$, $\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})] = \{w_1[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})], ..., w_r[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})]\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i) = \{f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i), ..., f_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q}) = \{f_1(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q}), ..., f_k(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})\}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{q} = (q_1, ..., q_m) \in \boldsymbol{Q}$, а $\boldsymbol{q}_i$ и $\boldsymbol{x}_j$ — m и n-разрядные двоичные вектора, их значения равны i и j соответственно.

Размерность функций в (3.2) часто велика, но обычно они хорошо минимизируются.

В случае тройки континуальных пространств принцип вычисления $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{xy}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{qy}(\boldsymbol{q})$ не меняется, однако при этом число компонентов функций, образованных по (3.2), становится бесконечным. Тем не менее, решение всегда сходится к функции конечного порядка, так как в худшем случае искомые функции должны порождать нулевые разбиения, размерность которых равна размерностям пространств. По существу, в процессе вычислений производится своего рода предельный переход, в результате соотношения (3.2) преобразуются к виду

$$\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{xy}(\boldsymbol{x}) = \lim_{i \to \infty} \{\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1)], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_i)], ...\},$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}}_{qy}(\boldsymbol{q}) = \lim_{j \to \infty} \{\boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q})], ..., \boldsymbol{w}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})], ...\}; \qquad (3.3)$$

где все компоненты образуются по аналогии с (3.2), причём в отличие него подстрочные индексы при фиксированных векторах обозначают только порядковый номер.

Символ « lim » в (3.3) означает повторяемость разбиений, порождённых компонентами функций после достижения некоторых значений $\boldsymbol{q}_i$ или $\boldsymbol{x}_j$, из чего следует бессмысленность дальнейшего увеличении числа компонентов. Признаком достижения предела служит неизменность ранга матриц Якоби функций под знаком « lim » при вариации $\boldsymbol{q}_i$ или $\boldsymbol{x}_j$.

Использованные положения могут быть основой и для вычисления операторов типа **m**, но удовлетворительные результаты автором получены только для конечных пространств. В реферируемой работе для алгебр пар Δ, носители которых входят в декартовы произведения функционально связанных решёток разбиений на множествах векторов пространств Хэмминга, предложена процедура вычисления характеристической функции разбиения $\mathbf{m}(\mathfrak{v})$.

Если алгебра пар на декартовом произведении функционально связанных решёток разбиений есть алгебра с СП, то, помимо вычисления операторов, в ней упрощаются и другие задачи. Так, в $\Delta \subseteq \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}$ задача выявления СП у порождённого функцией $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ разбиения

$\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$, сводится к проверке условия $\boldsymbol{v}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] \equiv \boldsymbol{F}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})]$, т. е. к установлению функциональной зависимости $\boldsymbol{v}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$ от $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Способы выявления такой зависимости рассмотрены выше.

Сложнее устанавливается наличие СП в алгебре $\Delta_{qq} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_2$. Для порождённого функцией $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ разбиения $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}_2$ условие наличия СП состоит в существовании такой векторной функции $\boldsymbol{F}$, которая обращает $\boldsymbol{u}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})]$ в тождество. В реферируемой работе показано, что в конечном случае проверка этого условия сводится к установлению функциональной зависимости $\boldsymbol{u}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$ от $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Для континуальных пространств принцип выявления СП не меняется, но бесконечная мощность носителей алгебр заставляет по аналогии с (3.3) использовать предельный переход и проверять условие наличия СП в покомпонентной форме:

$$\lim_{j \to \infty} \{u_1[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q})], \ldots, u_r[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q})], \ldots, u_1[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})], \ldots, u_r[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{q})], \ldots\} \equiv$$
$$\equiv \{F_1[u_1(q_1, \ldots, q_m), \ldots, u_r(q_1, \ldots, q_m)], \ldots, F_t[u_1(q_1, \ldots, q_m), \ldots, u_r(q_1, \ldots, q_m)]\}. \qquad (3.4)$$

Подобным же образом можно упростить вычисление СП-разбиения, ближайшего к заданному разбиению снизу. Так, если $\boldsymbol{L}$ — решётка разбиений на элементах n-мерного пространства $\boldsymbol{X}$, алгебра Δ порождена функцией связи $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, а разбиение $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{L}$ индуцируется функцией $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, то по теореме 3.2 функцию $\boldsymbol{s}^{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x})$ для $\mathfrak{s}(\mathfrak{v})$, можно определить как

$$\boldsymbol{s}^{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{i \to \infty} \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{M}^{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{M}^{(2)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}), \ldots,\ \boldsymbol{M}^{(i)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}), \ldots\}, \qquad (3.5)$$

где $\boldsymbol{M}^{(i)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x})$ — функция, порождающая $\mathbf{M}^{(i)}(\mathfrak{v})$, причём $\boldsymbol{M}^{(0)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{M}^{(1)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}^{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$, $\boldsymbol{M}^{(2)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}^{\mathfrak{v}}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{v}\{\,\boldsymbol{f}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]\}$ и $\boldsymbol{M}^{(i+1)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}^{(i)\mathfrak{v}}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$.

Функцию $\boldsymbol{s}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})$, порождающую СП-разбиение $\mathfrak{s}(\mathfrak{u})$ в $\Delta_{qq} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_2$, можно найти по той же формуле (3.5) после замены в ней символов $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ и $\mathfrak{v}$ на $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{q}$ и $\mathfrak{u}$ соответственно.

СП-разбиение, ближайшее к заданному сверху, вычисляется значительно сложнее, поскольку для этого требуется выполнить ряд аддитивных решёточных операций. Аналитическое решение получено автором только для пространств Хэмминга при задании разбиений через характеристические функции, причем решение задачи поиска функций $\boldsymbol{i}^{\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{i}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})$, порождающих $\mathfrak{i}(\mathfrak{v})$ и $\mathfrak{i}(\mathfrak{u})$ на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Q}$ соответственно, делится на три части. Первая состоит в преобразовании функций $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ в характеристические $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{ch}}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ch}}(\boldsymbol{q})$, вторая — в вычислении $\boldsymbol{m}^{(i)\mathfrak{v}}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{m}_{qq}^{(i)\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})$, порождающих $\mathbf{m}^{(i)}(\mathfrak{v})$ и $\mathbf{m}_{qq}^{(i)}(\mathrm{u})$, а третья — в последовательном суммировании результатов второй до выполнения второго равенства теоремы 3.2.

В четвертой главе реферируемой работы рассмотрены общие принципы решения задачи ФД динамических систем. Результат получен в виде конструкции, именуемой алгебраической моделью ФД, полученной на основе положений второй и третьей глав.

Прежде всего, в рамках нижеследующей теоремы установлены необходимые и достаточные условия осуществления ФД.

Теорема 4.1. Для того, чтобы в базовой форме ФД (рис. 1.4) обнаруживались ошибки класса $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ или любые ошибки в $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ в момент первого искажения системных множеств, необходимо и достаточно существования отображения $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_Q, \boldsymbol{r}_Y)$, связывающего $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ так, что его компоненты $\boldsymbol{r}_Q : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}_K$ и

$\boldsymbol{r_Y} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}_K$ суть отображения «на», обладающие следующими свойствами:

1. При отсутствии ошибок всегда справедливы равенства $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}_K$ и $\boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_K$.

2.$\forall \boldsymbol{e}_Q = (\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{q}_O) \in \boldsymbol{E}_Q \subset \boldsymbol{E}$ и $\forall \boldsymbol{e}_Y = (\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}_O) \in \boldsymbol{E}_Y \subset \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_Q \cup \boldsymbol{E}_Y$, справедливы соотношения $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q}_O) \neq \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}_K$ и $\boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y}_O) \neq \boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_K$.

Теорема 4.1 даёт строгую интерпретацию интуитивного требования согласованности работы систем $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ при отсутствии ошибок и нарушения таковой при их появлении. Условия существования согласованности формулируются ниже в виде следствий.

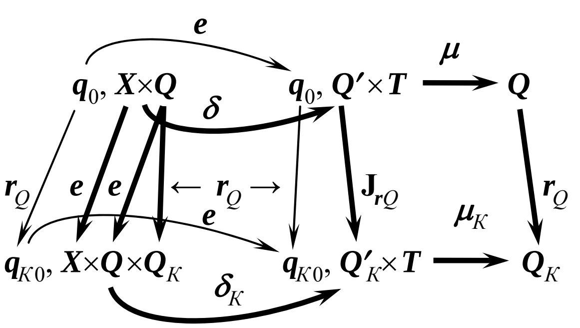
Следствие 4.1. Для того, чтобы согласованные по состояниям системы $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ и $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ были согласованы по выходам, необходимо и достаточно $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}$ обеспечить выполнение равенства $\boldsymbol{r}_Y[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_K[\boldsymbol{x}_K = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})]$.

Несколько сложнее выглядит условие согласованности систем по состояниям (динамике), поскольку его вид существенно зависит от типа системного времени.

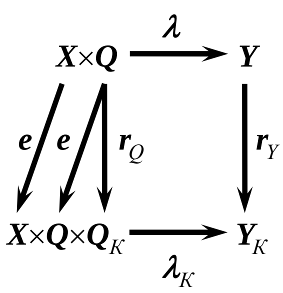
Следствие 4.2. Для того, чтобы системы с дискретным временем $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ и $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$, согласованные по состояниям в данный момент, оставались таковыми далее, необходимо и достаточно обеспечить постоянное выполнение равенства $\boldsymbol{r}_Q[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_K[\boldsymbol{x}_K = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})]$.

Следствие 4.3. Для того, чтобы системы с непрерывным временем $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ и $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}'_K, \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$, согласованные по состояниям в данные момент, оставались таковыми далее, необходимо и достаточно постоянного выполнения равенства $\mathbf{J}_{\boldsymbol{r}Q}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_K[\boldsymbol{x}_K = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})]$, где $\mathbf{J}_{\boldsymbol{r}Q}$ — преобразование, согласующее $\boldsymbol{r}_Q$ и $\boldsymbol{\delta}$, если они суть функции, то $\mathbf{J}_{\boldsymbol{r}Q}$ — матрица Якоби $\boldsymbol{r}_Q$, а преобразование есть вычислению произведения $\mathbf{J}_{\boldsymbol{r}Q}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})$.

Работу систем $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$, удовлетворяющих условиям теоремы 4.1 и её следствий, можно проиллюстрировать с помощью диаграмм согласованного функционирования. Первая из них (рис. 4.1, а) демонстрирует согласованность движения $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ по состояниям, вторая (рис. 4.1 б) — согласованность их выходов. При дискретном времени, из-за тривиальности отображения $\boldsymbol{\mu}$ и выполнения соотношений $\boldsymbol{Q}' \subseteq \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'_K \subseteq \boldsymbol{Q}_K$, $\boldsymbol{q}_{t+1} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{q}_t)$ и $\boldsymbol{q}_{K\,t+1} = \boldsymbol{\delta}_K(\boldsymbol{x}_{K\,t}, \boldsymbol{q}_{K\,t})$, первая диаграмма упрощается, принимая вид подобный второй.



а)



б)

Рис. 4.1. Диаграммы согласованного функционирования систем $\boldsymbol{S}$ *и* $\boldsymbol{S}_K$
а) — по состояниям, б) — по выходам (теорема 4.1)

Несложно показать, что из теоремы 4.1 следует коммутативность обеих диаграмм при отсутствии ошибок в $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ и нарушение коммутативности при их появлении.

Теорема 4.1 определяет и структуру дискриминатора ошибок $\boldsymbol{D}$, содержащую два безынерционных функциональных преобразователя $\mathbf{r}_Q$ и $\mathbf{r}_Y$ для вычисления отображений $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y})$, две схемы сравнения $\otimes$ для фиксации невязки векторов выхода вычислителей отображений и векторов из $\boldsymbol{Q}_K$ и $\boldsymbol{Y}_K$ и формирователь сигнала ошибки $\mathbf{E}$ (рис. 4.2).

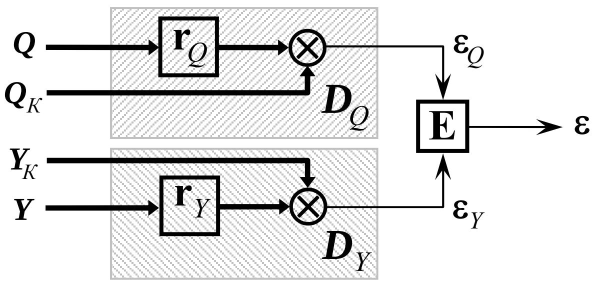


Рис. 4.2. Структура дискриминатора ошибок $\boldsymbol{D}$

Нетрудно убедиться, что внутри такого дискриминатора обнаруживаются любые ошибки в $\mathbf{r}_Q$ и $\mathbf{r}_Y$, ошибки схем сравнения, нарушающие хотя бы одно из равенств $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}_K$ и $\boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}_K$, и ошибки формирователя $\mathbf{E}$, приводящие к генерации 1 на его выходе.

Используя теорему 4.1 и её следствия, можно синтезировать средства ФД для любой динамической системы, однако, на работу такой $\boldsymbol{S}_K$ её собственные состояния не влияют, что, во-первых, может привести к размножению ошибок. Во-вторых, затруднено обнаружение сбоев из-за возможности самосинхронизации $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$. В-третьих, функция динамики $\boldsymbol{S}_K$, зависящая только от системных множеств $\boldsymbol{S}$, навязывает при дискретном времени инерционную часть $\boldsymbol{S}_K$ в форме функциональной задержки входного вектора, а при континуальном — в форме его прямого интегрирования, что может вызвать увеличение аппаратурных затрат.

Преодолеть эти недостатки можно, используя положения второй и третьих глав. Для этого объекту диагностирования сопоставлены два рода алгебр пар: алгебры, порождаемые функцией выходов $\boldsymbol{\lambda}$, и алгебры, порождаемые функцией динамики $\boldsymbol{\delta}$. Поскольку в общем случае $\boldsymbol{\lambda}: \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Y}$, алгебры первого рода суть $\Delta_{xy}=\{(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})|\,(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})\in\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_3,\ \forall\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}_1\equiv\boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{q})\equiv\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{q})(\mathfrak{w})\}$ и $\Delta_{qy}=\{(\mathfrak{u},\ \mathfrak{w})|\,(\mathfrak{u},\ \mathfrak{w})\in\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}_3,\ \forall\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}_1\equiv\boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u})\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1)\equiv\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{w})\}$, где $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ и $\boldsymbol{L}_3$ — решётки разбиений на множествах $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ (теорема 3.4). В частном случае $\boldsymbol{\lambda}:\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Y}$, тогда определена только одна $\Delta_{qy}=\{(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})|\,(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})\in\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}_3,\ \forall\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{q}_1\equiv\boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u})\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{q}_1)\equiv\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{w})\}$ (теорема 3.3).

Вид алгебр второго рода зависит от типа системного времени. Для дискретного времени $\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}$, порождаемые ей алгебры суть $\Delta_{xq}=\{(\mathfrak{v},\ \mathfrak{u})|\,(\mathfrak{v},\ \mathfrak{u})\in\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2,\ \forall\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}_1\equiv\boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})\Rightarrow\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{q})\equiv\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{q})(\mathfrak{u})\}$ и $\Delta_{qq}=\{(\mathfrak{u}_1,\ \mathfrak{u}_2)|\,(\mathfrak{u}_1,\ \mathfrak{u}_2)\in\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}_2,\ \forall\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}_1\equiv$ $\equiv\boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u}_1)\Rightarrow\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1)\equiv\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{u}_2)\}$. Отметим, что $\Delta_{qq}\subseteq\boldsymbol{L}_2\times\boldsymbol{L}_2$, т. е. в ней определено СП.

Для континуального времени $\boldsymbol{\delta}: \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}'$, и порождаемые ей алгебры суть $\Delta_{xq'}=\{(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}')|\,(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}')\in\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_4,\ \forall\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{x}_1\equiv\boldsymbol{x}_2(\mathfrak{v})\Rightarrow\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{q})\equiv\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{q})(\mathfrak{u}')\}$, и $\Delta_{qq'}=\{(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}')|\,(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}')\in$

$\in \boldsymbol{L}_2\times\ \boldsymbol{L}_4$, $\forall \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{q}_1 \equiv \boldsymbol{q}_2(\mathfrak{u}) \Rightarrow \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1) \equiv \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_2)(\mathfrak{u}')\}$, где $\boldsymbol{L}_4 = (\mathfrak{U}', \geq)$ — решётка разбиений на множестве $\boldsymbol{Q}'$. Очевидно, что обе алгебры не имеют СП.

Кроме функции динамики в системах с континуальным временем определено и интегральное преобразование $\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{Q}$, в котором $\boldsymbol{T}$ —множество временных отсчётов, причём $\forall \boldsymbol{q}' \in \boldsymbol{Q}'$, $(\boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{q}_0 + \int_0^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{q}' du = \boldsymbol{q}$. Поскольку $\boldsymbol{\mu}$ — однозначное отображение, оно также порождает две алгебры пар: Δ_{tq} и $\Delta_{q'q}$, из которых конструктивна лишь $\Delta_{q'q} = \{(\mathfrak{u}', \mathfrak{u}) | (\mathfrak{u}', \mathfrak{u}) \in \boldsymbol{L}_4 \times \boldsymbol{L}_2,\ \forall \boldsymbol{q}_1', \boldsymbol{q}_2' \in \boldsymbol{Q}', (\boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{q}_1' \equiv \boldsymbol{q}_2'(\mathfrak{u}') \Rightarrow \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q}_1', \boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{t}) \equiv \equiv \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q}_2', \boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{t})(\mathfrak{u})\} \subseteq \boldsymbol{L}_4 \times \boldsymbol{L}_2$, в которой СП также нет.

В диссертационной работе показано, что при континуальном времени роль СП-элемен-тов выполняют элементы с введённым свойством квазиподстановки (СКП), причём $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}_2$ обладает им на паре алгебр $\Delta_{qq'} \subseteq \boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_4$ и $\Delta_{q'q} \subseteq \boldsymbol{L}_4 \times \boldsymbol{L}_2$, тогда и только тогда, когда $\exists \mathfrak{u}' \in \boldsymbol{L}_4$, обеспечивающий совместную справедливость соотношений $(\mathfrak{u},\ \mathfrak{u}') \in \Delta_{qq'}$ и $(\mathfrak{u}', \mathfrak{u}) \in \Delta_{q'q}$. Показано также, что для наличия СКП у $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{L}_2$ необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из двух неравенств: $\mathbf{M}_{qq'}[\mathbf{M}_{q'q}(\mathfrak{u})] \geq \mathfrak{u}$; $\mathfrak{u} \geq \mathbf{m}_{q'q}[\mathbf{m}_{qq'}(\mathfrak{u})]$.

Тривиальные элементы $\boldsymbol{L}_2$ ($\mathfrak{0}$ и $\mathfrak{1}$) с очевидностью обладают КСП на этой паре алгебр.

Для обнаружения ошибок в базовой форме ФД (рис. 1.4) необходимо и достаточно выполнения условий теоремы 4.1 и её следствий. Для решения задачи приходится синтезировать $\boldsymbol{S}_K$ с некоторыми ограничениями. В реферируемой работе рядом теорем ограничения установлены и предложена каноническая форма $\boldsymbol{S}_K$, соответствующая таковым.

Теорема 4.2. Для существования диагностического отображения $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_Q, \boldsymbol{r}_Y)$, связывающего системы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ (теорема 4.1), необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1. Переходы $\boldsymbol{S}_K$ по элементам $\boldsymbol{q}_K \in \boldsymbol{Q}_K$ и $\boldsymbol{y}_K \in \boldsymbol{Y}_K$ происходят синхронно с переходами $\boldsymbol{S}$ по блокам разбиений $\mathfrak{u}_R$ на $\boldsymbol{Q}$ и $\mathfrak{w}_R$ на $\boldsymbol{Y}$, и с точностью до переобозначений $\boldsymbol{Q}_K = \{\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q})\} = \mathfrak{u}_R$, $\boldsymbol{Y}_K = \{\boldsymbol{B}_{\mathfrak{w}R}(\boldsymbol{y})\} = \mathfrak{w}_R$, и $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}_K = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})$, при дискретном времени из определённости $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ следует равенство $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_K[\boldsymbol{x}_K,\ \boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q})]$, при непрерывном — $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}\{\boldsymbol{\mu}[\boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{q}), \boldsymbol{t}]\} = \boldsymbol{\mu}_K\{\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q}_0), \boldsymbol{\delta}_K[\boldsymbol{x}_K, \boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{t}]\}$, и во всех случаях — $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{w}R}[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_K[\boldsymbol{x}_K, \boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q})]$.

2. $\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ блоки разбиений $\mathfrak{u}_R$ и $\mathfrak{w}_R$ определены соотношениями $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}R}(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{q}_i \,|\, \boldsymbol{q} \leftrightarrow \leftrightarrow \boldsymbol{q}_i \notin\ \boldsymbol{E}_Q \subset \boldsymbol{E}\}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{w}R}(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{y}_i \,|\, \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}_i \notin\ \boldsymbol{E}_Y \subset \boldsymbol{E}\}$ соответственно.

По теореме 4.2 в $\boldsymbol{S}_K$ определяются значения функций $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ системы $\boldsymbol{S}$ с точностью до блоков разбиений $\mathfrak{u}_R$ и $\mathfrak{w}_R$, порождаемых $\boldsymbol{r}_Q$ и $\boldsymbol{r}_Y$, в результате диаграммы согласованного функционирования (рис.4.1) приводятся к виду, учитывающему это (рис.4.3). В соответствии ними $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K, \boldsymbol{Q}_K, \boldsymbol{Q}_K', \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\lambda}_K)$ можно трактовать как $\boldsymbol{S}_K = (\boldsymbol{X}_K = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Q}, \mathfrak{u}_R, \mathfrak{u}_R', \boldsymbol{Y}_K, \boldsymbol{\delta}_K, \mathfrak{w}_R)$.

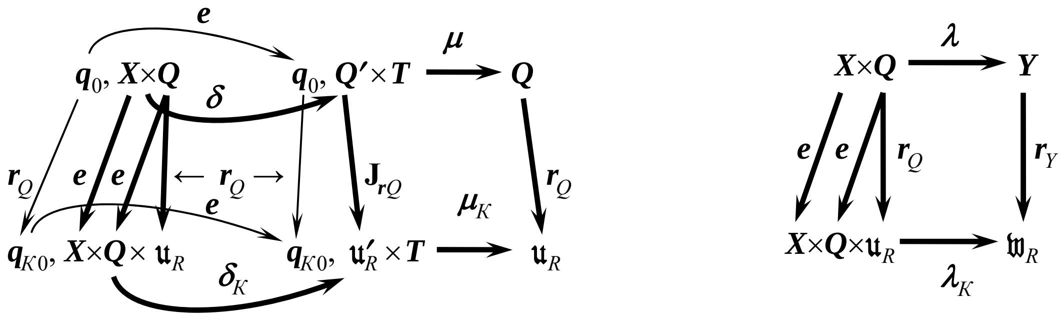
Теорема 4.2, ограничивая систему $\boldsymbol{S}_K$ как математический объект, не ограничивает её реализации. В реферируемой работе предложено использовать форму $\boldsymbol{S}_K$, именуемую канонической (развёрнутая декомпозиция) и определённую условиями следующей теоремы.

Теорема 4.3. Если система $\boldsymbol{S}_K$, связана с объектом $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}', \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda})$ отображением $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_Q, \boldsymbol{r}_Y)$, введённым теоремой 4.1, то она представима в виде совокупности из четырёх безынерционных функциональных преобразователей и системы $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{uw}R}$, причём компоненты этой совокупности (рис. 4.4) построены в соответствии со следующими условиями:

1. $\mathbf{v}_{\delta}$ и $\mathbf{u}_{\delta}$ —вычислители функций $\boldsymbol{v}_{\delta}$ и $\boldsymbol{u}_{\delta}$, порождающих разбиения $\mathfrak{v}_{\delta}$ и $\mathfrak{u}_{\delta}$ на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Q}$ так, что $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$, и $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_j \in \boldsymbol{Q}$ в системе $\boldsymbol{S}$ из $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_i(\mathfrak{v}_{\delta})$ и $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q}_j(\mathfrak{u}_{\delta}\mathfrak{u}_R)$ при континуальном времени следует $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{q})(\mathfrak{u}'_R)$ и $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_j)(\mathfrak{u}'_R)$, а при дискретном — $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv$ $\equiv \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{q})(\mathfrak{u}_R)$ и $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_j)(\mathfrak{u}_R)$.

2. $\mathbf{v}_{\lambda}$ и $\mathbf{u}_{\lambda}$ — вычислители функций $\boldsymbol{v}_{\lambda}$ и $\boldsymbol{u}_{\lambda}$, порождающих разбиения $\mathfrak{v}_{\lambda}$ и $\mathfrak{u}_{\lambda}$ на $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Q}$ так, что $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$, и $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_j \in \boldsymbol{Q}$ в системе $\boldsymbol{S}$ из $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_i(\mathfrak{v}_{\lambda})$ и $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q}_j(\mathfrak{u}_{\lambda}\mathfrak{u}_R)$ всегда следует $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv$ $\equiv \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{q})(\mathfrak{w}_R)$ и $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_j)(\mathfrak{w}_R)$.

3. Система $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{uw}R}$ — система, состоящая из системы состояний $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{u}R}$ и функционального преобразователя $\lambda_{\mathfrak{uw}R}$. При континуальном времени $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{u}R} = (\boldsymbol{X}_{\mathfrak{u}R}, \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{u}R} = \mathfrak{u}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{Q}'_{\mathfrak{u}R} = \mathfrak{u}'_R, \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R})$, $\boldsymbol{X}_{\mathfrak{u}R} =$ $= \mathfrak{v}_{\delta} \times \mathfrak{u}_{\delta}$ и $\boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R} : \mathfrak{v}_{\delta} \times \mathfrak{u}_{\delta} \times \mathfrak{u}_R \to \mathfrak{u}'_R$, а при дискретном — $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{u}R} = (\boldsymbol{X}_{\mathfrak{u}R}, \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{u}R} = \mathfrak{u}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R})$, $\boldsymbol{X}_{\mathfrak{u}R} = \mathfrak{v}_{\delta} \times \mathfrak{u}_{\delta}$, $\boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R} : \mathfrak{v}_{\delta} \times \mathfrak{u}_{\delta} \times \mathfrak{u}_R \to \mathfrak{u}_R$; в $\lambda_{\mathfrak{uw}R}$ всегда осуществляется отображение $\boldsymbol{\lambda}_{\mathfrak{uw}R} : \mathfrak{v}_{\lambda} \times \mathfrak{u}_{\lambda} \times \mathfrak{u}_R \to \mathfrak{w}_R$.



а) *б)*

Рис. 4.3. Преобразованные диаграммы согласованного функционирования систем $\mathbf{S}$ *и* $\mathbf{S}_K$*: а) — по состояниям, б) — по выходам (теорема 4.2)*

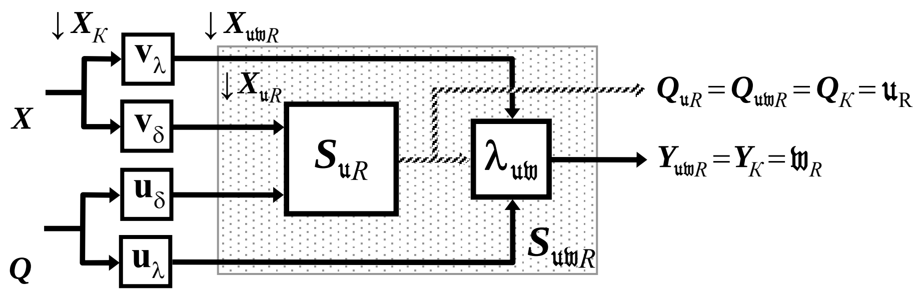


Рис. 4.4. Представление контрольной системы $\mathbf{S}_K$ *по теореме 4.3*

Следствие 4.4. Если $\mathfrak{v}_{\delta}$, $\mathfrak{v}_{\lambda}$, $\mathfrak{u}_{\delta}$, $\mathfrak{u}_{\lambda}$, $\mathfrak{u}_R$, $\mathfrak{u}'_R$ и $\mathfrak{w}_R$ — разбиения на системных множествах $\boldsymbol{S}$, определённые по теореме 4.3, то из них могут быть образованы элементы алгебр пар на ней: $(\mathfrak{v}_{\delta}, \mathfrak{u}_R) \in \Delta_{xq}$, $(\mathfrak{u}_{\delta}\mathfrak{u}_R, \mathfrak{u}_R) \in \Delta_{qq}$, $(\mathfrak{v}_{\lambda}, \mathfrak{w}_R) \in \Delta_{xy}$ и $(\mathfrak{u}_{\lambda}\mathfrak{u}_R, \mathfrak{w}_R) \in \Delta_{qy}$ при дискретном времени и $(\mathfrak{v}_{\delta}, \mathfrak{u}'_R) \in \Delta_{xq'}$, $(\mathfrak{u}_{\delta}\mathfrak{u}_R, \mathfrak{u}'_R) \in \Delta_{qq'}$, $(\mathfrak{u}'_R, \mathfrak{u}_{\mathrm{R}}) \in \Delta_{q'q}$, $(\mathfrak{v}_{\lambda}, \mathfrak{w}_R) \in \Delta_{xy}$ и $(\mathfrak{u}_{\lambda}\mathfrak{u}_R, \mathfrak{w}_R) \in \Delta_{qy}$ при непрерывном.

Справедливость следствия 4.4 вытекает из определения системных алгебр пар.

Теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 позволяют сделать вывод, что $\boldsymbol{S}_K$ и $\boldsymbol{D}$ для системы $\boldsymbol{S}$ и класса ошибок в ней при дискретном времени определены шестёркой разбиений $\mathfrak{v}_{\delta}$, $\mathfrak{v}_{\lambda}$, $\mathfrak{u}_{\delta}$, $\mathfrak{u}_{\lambda}$, $\mathfrak{u}_R$ и

$\mathfrak{w}_R$, причём в паре $\mathfrak{u}_R$, $\mathfrak{w}_R$ содержится информация о системе $\boldsymbol{S}$, обеспечивающая обнаружение ошибок, а в парах $\mathfrak{v}_\delta$, $\mathfrak{v}_\lambda$,и $\mathfrak{u}_\delta$, $\mathfrak{u}_\lambda$, — информация о системе $\boldsymbol{S}$, необходимая и достаточная для вычисления разбиений первой пары. Для этой шестёрки введём конструкцию вида

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{u}_\delta \arrow[r] & \mathfrak{u}_R \arrow[r] \arrow[loop above] & \mathfrak{w}_R & \mathfrak{u}_\lambda, \arrow[l] \\ & \mathfrak{v}_\delta \arrow[u] & \mathfrak{v}_\lambda \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

в которой стрелки характеризуют использование информации в $\boldsymbol{S}_K$ при определении разбиений $\mathfrak{u}_R$ и $\mathfrak{w}_R$ на системных множествах $\boldsymbol{S}$. Отметим, что по (4.1) для определения $\mathfrak{u}_R$ используется и информация о системе $\boldsymbol{S}$, содержащаяся в нём самом.

Связанность разбиения в (4.1) входящей стрелкой с одним разбиением эквивалентно их вхождению алгебру пар на системе $\boldsymbol{S}$, причём первый компонент пары находится у тупого конца стрелки, а второй — у острого. Если разбиение в (4.1) связано входящими стрелками с несколькими разбиениями на одном множестве, то оно входит в соответствующую алгебру пар совместно с произведением всех разбиений, стоящих у тупых концов этих стрелок.

Соотношение (4.1) совместно с объектом $\boldsymbol{S}$ определяет контрольную систему $\boldsymbol{S}_K$, дискриминатор $\boldsymbol{D}$ в части обнаружения ошибок и алгебраические свойства компонентов их декомпозиций (рис. 4.2 и 4.4), что позволяет считать его алгебраической моделью совокупности $\boldsymbol{S}_K$ и $\boldsymbol{D}$ или алгебраической моделью ФД объекта $\boldsymbol{S}$ — системы с дискретным временем.

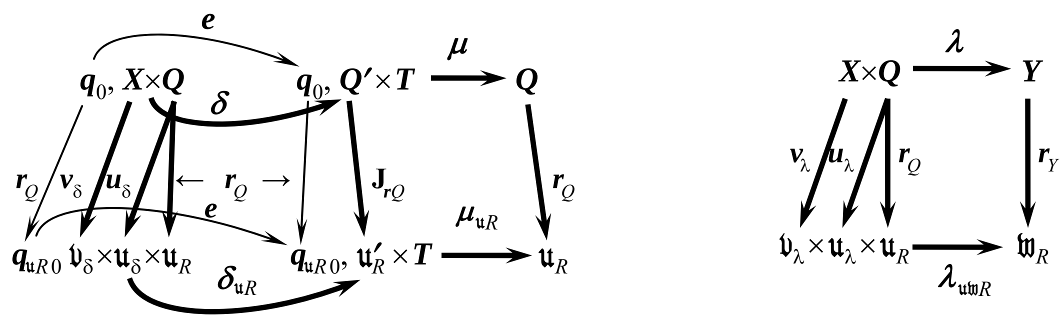
Для объектов с континуальным временем алгебраическая модель усложняется, поскольку к основным системным множествам $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Y}$ добавляется $\boldsymbol{Q'}$, а число конструктивных алгебр пар на $\boldsymbol{S}$ доходит до пяти. В результате модель ФД принимает вид,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{u}_\delta \arrow[r] & \mathfrak{u}'_R \arrow[r] & \mathfrak{u}_R \arrow[r] \arrow[l, bend right] & \mathfrak{w}_R & \mathfrak{u}_\lambda, \arrow[l] \\ & \mathfrak{v}_\delta \arrow[u] & & \mathfrak{v}_\lambda \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

в котором по аналогии с (4.1) связанность разбиений стрелками соответствует их вхождению в алгебры пар $(\mathfrak{v}_\delta, \mathfrak{u}'_R)\in\Delta_{xq'}$, $(\mathfrak{u}_\delta\mathfrak{u}_R, \mathfrak{u}'_R)\in\Delta_{qq'}$, $(\mathfrak{u}'_R, \mathfrak{u}_R)\in\Delta_{q'q}$, $(\mathfrak{u}_\lambda\mathfrak{u}_R, \mathfrak{w}_R)\in \in\Delta_{qy}$ и $(\mathfrak{v}_\lambda, \mathfrak{w}_R)\in\Delta_{xy}$.

Алгебраические модели (4.1) и (4.2) в неявной форме характеризует и согласованную работу $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{uw}R}$ при отсутствии ошибок. Коммутативные диаграммы согласованного функционирования $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ (рис. 4.5) отличаются от рассмотренных выше (рис. 4.1 и 4.3) тем, что в них часть тождественных отображений $\boldsymbol{e}$ заменяется такими функциями $\boldsymbol{v}_\delta$, $\boldsymbol{v}_\lambda$, $\boldsymbol{u}_\delta$ и $\boldsymbol{u}_\lambda$, для которых $\boldsymbol{v}_\delta\colon \boldsymbol{X}\to\mathfrak{v}_\delta$, $\boldsymbol{v}_\lambda\colon \boldsymbol{X}\to\mathfrak{v}_\lambda$, $\boldsymbol{u}_\delta\colon\boldsymbol{Q}\to\mathfrak{u}_\delta$ и $\boldsymbol{u}_\lambda\colon\boldsymbol{Q}\to\mathfrak{u}_\lambda$, причём $\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{v}_\delta(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}_{\mathfrak{v}\delta}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v}_\lambda(\boldsymbol{x})= =\boldsymbol{B}_{\mathfrak{v}\lambda}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{u}_\delta(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}\delta}(\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{B}_{\mathfrak{u}\lambda}(\boldsymbol{x})$. В сущности, таким образом задаются алгебраические свойства разбиений, что позволяет считать диаграммы второй формой задания модели ФД.

Алгебраические модели можно использовать для синтеза средств ФД, но для конкретной задачи они определяются неоднозначно, так как условиям теоремы 4.1 могут удовлетворять несколько отображений $\boldsymbol{R}$. В реферируемой работе показано, что такая модель существует всегда и для всех ранее известных методов ФД, решение либо сводится к ней, либо неверно (есть необнаруживаемые ошибки).



а) *б)*

Рис. 4.5. Диаграммы согласованного функционирования $\boldsymbol{S}$ *и* $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{uw}R}$ *(*$\boldsymbol{S}_K$*) при ФД в соответствии с моделью (4.2): а) — по состояниям, б) — по выходам*

В пятой главе диссертационной работы решается задача реализации алгебраической модели ФД, понимаемая как синтез по модели дискриминатора $\boldsymbol{D}$ и системы $\boldsymbol{S}_K$, модель же строится на основе отображения $\boldsymbol{R}$. При синтезе $\boldsymbol{S}_K$ минимизируется по критерию порядка.

Первой исследована реализация модели ФД контрольной системой в форме функциональной (логической) задержки. Показано, что в этом случае для дискретного времени алгебраическая модель ФД может быть получена преобразованием модели (4.1) к виду

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{u}_\delta & \to & \mathfrak{u}_R & \to & \mathfrak{w}_R & \leftarrow & \mathfrak{u}_\lambda, \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathfrak{v}_\delta & & \mathfrak{v}_\lambda & & \end{array} \tag{5.1}$$

в котором разбиения $\mathfrak{u}_R$ и $\mathfrak{w}_R$ определены отображением $\boldsymbol{R}$, а четыре других компонента выбраны исходя из условий: вхождения в соответствующие алгебры пар на системе $\boldsymbol{S}$.

Структура $\boldsymbol{S}_K$ в форме логической задержки не отличается от канонической (рис. 4.2), для её минимизации достаточно положить $\mathfrak{v}_\delta = \mathbf{M}_{xq}(\mathfrak{u}_R)$, $\mathfrak{u}_\delta = \mathbf{M}_{qq}(\mathfrak{u}_R)$ и $\mathfrak{v}_\lambda = \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$, а в качестве $\mathfrak{u}_\lambda$ взять максимальное решение неравенства $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R) \geq \mathfrak{u}_\lambda \mathfrak{u}_R$. Выполнив такие замены, получим оптимальную алгебраическую модель ФД в форме функциональной задержки:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{M}_{qq}(\mathfrak{u}_R) & \to & \mathfrak{u}_R & \longrightarrow & \mathfrak{w}_R & \leftarrow & \mathfrak{u}_\lambda, \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{M}_{xq}(\mathfrak{u}_R) & & \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R) & & \end{array} \tag{5.2}$$

В системе $\boldsymbol{S}_K$, построенной по модели (5.2), функции динамики и выходов реализуются в виде разделимых декомпозиций, в которые функции, порождающие разбиения модели, входят как компоненты, что позволяет описать их соотношениями вида

$$\boldsymbol{r}_Q[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}_R}_{xq}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}_R}_{qq}(\boldsymbol{q})], \qquad \boldsymbol{r}_Y[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_{\mathfrak{uw}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})], \tag{5.3}$$

где, к примеру, символом $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x})$ обозначена функция, порождающая разбиение $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$.

На основе (5.3) для систем с дискретным временем разработана процедура синтеза оптимальной $\boldsymbol{S}_K$ в форме функциональной задержки. При её выполнении вычисляются порождающиё функции разбиений в (5.2), решается неравенство $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R) \geq \mathfrak{u}_\lambda \mathfrak{u}_R$, определяются функции динамики и выходов $\boldsymbol{S}_K$ по (5.3) и синтезируется искомая $\boldsymbol{S}_K$ в канонической форме.

Принцип реализации алгебраической модели ФД в форме функциональной задержки для случая континуального времени не отличается от только что использованного, специфика проявляется в увеличении числа компонентов модели и изменении способов вычисления порождающих функций. В результате оптимальная алгебраическая модель принимает вид

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbf{M}_{qq'}(\mathfrak{u}'_R) \arrow[r] & \mathfrak{u}'_R \arrow[r] & \mathfrak{u}_R \arrow[r] & \mathfrak{w}_R & \mathfrak{u}_\lambda, \arrow[l] \\ & \mathbf{M}_{xq'}(\mathfrak{u}'_R) \arrow[u] & & \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R) \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

в котором разбиения $\mathbf{M}_{qq'}(\mathfrak{u}'_R)$ и $\mathbf{M}_{xq'}(\mathfrak{u}'_R)$ порождены функциями, определяемыми с помощью произведения $\mathbf{J}_{rQ}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$ ($\mathbf{J}_{rQ}$ — матрица Якоби $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})$ — функция динамики $\boldsymbol{S}$).

Преобразуется также первое равенство в (5.3): $\mathbf{J}_{rQ}\,\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'_R}_{xq'}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'_R}_{qq'}(\boldsymbol{q})]$, а второе не меняется. Процедура синтеза $\boldsymbol{S}_K$ в континуальном случае отличается от предыдущей использованием произведения $\mathbf{J}_{rQ}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$ и коррекцией соотношения (5.3).

Основные свойства контрольных систем в форме функциональной задержки суть нетривиальность решения задачи ФД, минимальность контрольной системы по критерию порядка, необходимость полной доступности компонентов векторов системных множеств объекта диагностирования и возможность самосинхронизации. Первые два определяют достоинства таких систем, а третье — основной недостаток. Четвёртое свойство может быть как полезным, так и вредным в зависимости от вида $\boldsymbol{S}$ и формулировки диагностической задачи.

Решение задачи ФД с помощью контрольной системы в форме функциональной задержки является предельным, поскольку такая $\boldsymbol{S}_K$ связана с объектом диагностирования максимальным образом. В диссертационной работе рассмотрен и другой предельный случай, когда связь между ними минимальна, что влечёт за собой наличие гомоморфизма $\boldsymbol{S}$ на $\boldsymbol{S}_K$ (рис. 1.3). Такой гомоморфизм накладывает ряд ограничений на диагностическое отображение и на алгебраическую модель ФД. Из-за недоступности состояний $\boldsymbol{S}$ первое переходит в $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_Y)$, а вторая в случае дискретного времени трансформируется к виду

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathfrak{v}_\delta \arrow[r] & \mathfrak{u} \arrow[r] \arrow[loop above] & \mathfrak{w}_R & \mathfrak{v}_\lambda, \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

а в случае континуального — к виду

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathfrak{v}_\delta \arrow[r] & \mathfrak{u}' \arrow[r] & \mathfrak{u} \arrow[r] \arrow[l, bend right] & \mathfrak{w}_R & \mathfrak{v}_\lambda. \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

В соответствии с (5.7) и (5.8) упрощается и каноническая форма $\boldsymbol{S}_K$ (рис. 4.4), в которой исключаются блоки $\mathbf{u}_\delta$ и $\mathbf{u}_\lambda$, а блоки $\mathbf{v}_\delta$,и $\mathbf{v}_\lambda$ принимают тривиальный вид.

Для оптимизации гомоморфных моделей (5.5) и (5.6) и используются те же принципы, что и для случая функциональной задержки. Главное отличие состоит в том, что вместо разбиения $\mathfrak{u}_R$ приходится использовать наибольшее разбиение $\mathfrak{u}$, имеющее СП либо СКП. В реферируемой работе показано, что при дискретном времени таковое есть $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ в алгебре Δ_{qq}, в результате оптимизированная алгебраическая модель ФД сводится к

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathfrak{v}_\delta = \mathbf{M}_{xq}\{\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\} \arrow[r] & \mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \arrow[r] \arrow[loop above] & \mathfrak{w}_R & \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R) = \mathfrak{v}_\lambda. \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

При вычислении $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ может быть получено нулевое разбиение, что является признаком совпадения $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$ (ФД дублированием). При $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \neq \mathfrak{o}$ контрольная система нетривиальна, её функции динамики и выходов можно найти по аналогии с (5.3) и при условии замены $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})$ на функцию $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})$, порождающую разбиение $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$:

$$\boldsymbol{s}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{s}}_{xq}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})], \qquad \boldsymbol{r}_Y[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{w}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})]. \tag{5.8}$$

Соотношения (5.8) и (5.9) положены в основу процедуры синтеза оптимальной гомоморфной $\boldsymbol{S}_K$, состоящей из определения функций $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{qy}(\boldsymbol{q})$, порождающих разбиения $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$ и $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$, вычисления функций $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{s}}_{xq}(\boldsymbol{x})$, порождающих разбиения $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ и $\mathbf{M}_{xq}\{\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\}$, выражения функций динамики и выходов $\boldsymbol{S}_K$ в соответствии с (5,9) и синтеза искомой системы в канонической форме (рис. 4.4) с исключёнными блоками $\mathbf{u}_\delta$ и $\mathbf{u}_\lambda$.

В случае континуального времени (5.8) по аналогии с переходом от (5.2) к (5.4) преобразуется в модель вида

$$\mathbf{M}_{xq'}\{\boldsymbol{\mathfrak{S}}'[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\} \to \boldsymbol{\mathfrak{S}}'[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \to \boldsymbol{\mathfrak{S}}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \to \mathfrak{w}_R \leftarrow \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R). \tag{5.9}$$

Основное отличие модели (5.10) от предыдущей заключается в использовании разбиения $\boldsymbol{\mathfrak{S}}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ вместо $\mathfrak{s}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$. Оно представляет собой наибольшее разбиение с СКП, меньшее $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$. В реферируемой работе показано, что функция, порождающая максимальное СКП-разбиение, меньшее наперёд заданного $\mathfrak{u}$ есть

$$\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q}) = \lim_{i\to\infty}\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}), (1)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}), (2)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}), \ldots, (i)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}), (i+1)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q})\}, \tag{5.10}$$

где $(1)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}) = \lim\limits_{j\to\infty}\{\mathbf{J}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{q}), \ldots, \mathbf{J}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{q})\} \div \mathbf{M}^{(1)}_{qq'}(\mathfrak{u}') = \mathbf{M}_{qq'}(\mathfrak{u}')$, $(2)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}) \div \mathbf{M}^{(2)}_{qq'}(\mathfrak{u}') = \mathbf{M}_{qq'}\{[\mathbf{M}^{(1)}_{qq'}(\mathfrak{u}')]'\}$, $(i+1)\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}'}_{qq'}(\boldsymbol{q}) \div \mathbf{M}_{qq'}\{[\mathbf{M}^{(i)}_{qq'}(\mathfrak{u}')]'\}$.

Положив $\mathfrak{u} = \mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$, с помощью (5.11) можно определить порождающую функцию разбиения $\boldsymbol{\mathfrak{S}}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ модели (5.10), а затем, и разделимые декомпозиции для функций динамики и выходов $\boldsymbol{S}_K$, построенной по этой модели:

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{S}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{S}'}_{xq'}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})], \qquad \boldsymbol{r}_Y[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{w}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})], \tag{5.11}$$

в которых $\mathbf{J}_{\mathfrak{S}}$ — матрица Якоби функции $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q}) \div \boldsymbol{\mathfrak{S}}(\mathfrak{u})$, $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{S}'}_{xq'}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x})$ — функции, порождающие разбиения $\mathbf{M}_{xq'}\{\boldsymbol{\mathfrak{S}}'[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\}$ и $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$ на множестве $\boldsymbol{X}$ системы $\boldsymbol{S}$ соответственно.

На основе соотношений (5.10) — (5.12) в реферируемой работе построена процедура синтеза гомоморфной $\boldsymbol{S}_K$ для объекта $\boldsymbol{S}$ с континуальным временем. Основное её отличие от процедуры, предназначенной для $\boldsymbol{S}$ с дискретным временем, заключается в необходимости вычисления функции $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{u}}(\boldsymbol{q})$, порождающей СКП-разбиение $\boldsymbol{\mathfrak{S}}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ на множестве состояний, с последующим использованием её вместо функции $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{q})$ предыдущей процедуры.

Главное положительное свойство реализации ФД с помощью гомоморфной контрольной системы состоит в невозможности самосинхронизация $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}_K$, что гарантирует обнаружения ошибок заданного класса. Ценой этого являются необходимость согласования начальных состояний обеих систем и повышенные аппаратурные затраты.

Кроме предельных форм реализации алгебраической модели ФД в реферируемой работе рассмотрены и промежуточные, требующие частичной доступности вектора состояний

$\boldsymbol{S}$ при порядке $\boldsymbol{S}_K$, лежащим между верхней и нижней границами. Промежуточная форма контрольной системы, связанная с системой $\boldsymbol{S}$ минимальным образом, но не требующая увеличения её порядка, получается при совместной минимизации блоков $\mathbf{u}_\delta$ и $\mathbf{u}_\lambda$ в $\boldsymbol{S}_K$ канонического вида (рис. 4.4) с учётом информации о состояниях $\boldsymbol{S}_K$, содержащейся в блоках разбиения $\mathfrak{u}_R$. Алгебраическая модель такой $\boldsymbol{S}_K$ получается путём замены в (5.2) разбиений $\mathbf{M}_{qq}(\mathfrak{u}_R)$ и $\mathfrak{u}_\lambda$ максимальным решением неравенства $\mathbf{M}_{qq}(\mathfrak{u}_R)\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R) \geq \mathfrak{u}\mathfrak{u}_R$, что приведёт её к виду

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_{xq}(\mathfrak{u}_R) \arrow[r] & \mathfrak{u}_R \arrow[loop above] \arrow[r, longrightarrow] \arrow[r, bend right=50, leftrightarrow, "\mathfrak{u}"'] & \mathfrak{w}_R & \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R). \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{5.12}$$

Разделимые декомпозиции для функций динамики и выходов контрольных систем, соответствующих моделям (5.12) суть

$$\boldsymbol{r}_Q[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{u}_R}_{xq}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})], \qquad \boldsymbol{r}_Y[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})] = \boldsymbol{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{w}R}[\boldsymbol{M}^{\mathfrak{w}_R}_{xy}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})]. \tag{5.13}$$

Для синтеза $\boldsymbol{S}_K$ по модели (5.12) можно использовать процедуру, разработанную для модели (5.2), при условии соответствующей замены разбиений в ней.

Рассмотренная промежуточная форма получена преобразованием контрольной системы в форме функциональной задержки без изменения её порядка. Кроме неё в реферируемой работе предложена реализация $\boldsymbol{S}_K$ как последовательной декомпозиции, причём в процессе её синтеза порядок последовательно увеличивается.

При дискретном времени преобразование $\boldsymbol{S}_K$ в форме функциональной задержки в такую промежуточную форму сводится к многократному применению оператора типа $\mathbf{M}$ к разбиению $\mathfrak{w}_R$. В результате получается последовательность сомножителей

$$\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R),\ \mathbf{M}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)], \mathbf{M}^{(2)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)], \dots, \mathbf{M}^{(i)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)], \tag{5.14}$$

приводящих к образованию гомоморфной модели, прерванная прежде появления СП-разбиения. Точка прерывания устанавливается, исходя из ограничений, наложенных на контрольную систему. Если ограничен её порядок $\boldsymbol{S}_K$, то для реализации модели ФД последовательно вычисляются вспомогательные разбиения $\mathfrak{u}_k = \prod_{i=0}^{k}\mathbf{M}^{(i)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ с обязательной минимизацией порядка функций $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{q})$, порождающих эти разбиения. Если допустимый порядок превышен, — возврат к $\boldsymbol{u}_{k-1}(\boldsymbol{q})$ и синтез искомой $\boldsymbol{S}_K$ в канонической форме функциональной задержки при условии замены разбиения $\mathfrak{u}_R$ разбиением $\mathfrak{u}_{k-1}$, порождённым $\boldsymbol{u}_{k-1}(\boldsymbol{q})$.

Если эта промежуточная формы строится в виде последовательной декомпозиции, то ограничивают не её порядок, а число разбиений в (5.14). Положив его равным $k+1$, последовательность можно представить как $\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$, $\mathbf{M}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, $\mathbf{M}^{(2)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, ... , $\mathbf{M}^{(i)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, ... , $\mathbf{M}^{(k)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, которой с очевидностью сопоставляется искомая $\boldsymbol{S}_K$ (рис.5.1).

В полученной системе $\forall \boldsymbol{S}_{\mathrm{M}\,\mathrm{i}} \in \boldsymbol{S}_K$, $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{M}\,\mathrm{i}} = \mathbf{M}^{(i)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, а для $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{u}\mathfrak{w}} \in \boldsymbol{S}_K$, — $\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{u}\mathfrak{w}} = \mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$, где $\mathfrak{w}_R$ — разбиение, порождённое отображением $\boldsymbol{r}_Y$. Функциональные преобразователи $\mathbf{v}_\lambda$ и $\mathbf{v}_{\delta\mathrm{i}}$ суть вычислители функций, порождающих $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$ и $\mathbf{M}_{xq}\{\mathbf{M}^{(i)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\}$, а в $\mathbf{u}_{\delta\mathrm{k}}$ вычисляется функция, порождающая либо решение $\mathbf{M}^{(k+1)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \geq \mathfrak{u}_{\delta\mathrm{k}}\mathbf{M}^{(k)}_{qq}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ относительно

$\mathfrak{u}_\delta$, либо $\mathbf{M}_{qq}^{(k+1)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$. В первом случае система $\boldsymbol{S}_{\mathrm{M}k}$ принимает первую промежуточную форму, во втором — форму функциональной задержки первую.

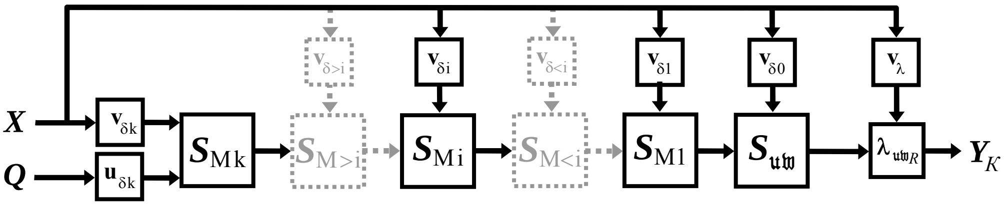


Рис. 5.1. Последовательная декомпозиция для промежуточной формы контрольной системы $\boldsymbol{S}_K$, построенная в соответствии с (5.14)

В полученной системе $\forall \boldsymbol{S}_{\mathrm{M}i} \in \boldsymbol{S}_K$, $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{M}i} = \mathbf{M}_{qq}^{(i)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, а для $\boldsymbol{S}_{\mathfrak{uw}} \in \boldsymbol{S}_K$, — $\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{uw}} = \mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)$, где $\mathfrak{w}_R$ — разбиение, порождённое отображением $\boldsymbol{r}_Y$. Функциональные преобразователи $\mathbf{v}_\lambda$ и $\mathbf{v}_{\delta i}$ суть вычислители функций, порождающих $\mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R)$ и $\mathbf{M}_{xq}\{\mathbf{M}_{qq}^{(i)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]\}$, а в $\mathbf{u}_{\delta k}$ вычисляется функция, порождающая либо решение $\mathbf{M}_{qq}^{(k+1)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)] \geq \mathfrak{u}_{\delta k}\mathbf{M}_{qq}^{(k)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$ относительно $\mathfrak{u}_\delta$, либо $\mathbf{M}_{qq}^{(k+1)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$. В первом случае система $\boldsymbol{S}_{\mathrm{M}k}$ принимает первую промежуточную форму, во втором — форму функциональной задержки первую.

Функции выходов системы $\boldsymbol{S}_K$ и динамики всех входящих в $\boldsymbol{S}_K$ подсистем $\boldsymbol{S}_{\mathrm{M}i}$ можно получить с помощью равенств (5.3), при условии замены в них разбиения $\mathfrak{u}_R$ разбиением $\mathbf{M}_{qq}^{(i)}[\mathbf{M}_{qy}(\mathfrak{w}_R)]$, а функции $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})$ — функцией, его порождающей.

Для уменьшения объёма рассматриваемой декомпозиции можно, во-первых, выполнить совместную минимизацию функциональных преобразователей и, во-вторых, ввести обратные связи с выходов всех систем состояний на вход $\boldsymbol{S}_{\mathrm{M}k}$. Внутренняя структура $\boldsymbol{S}_K$ при этом измениться, однако декомпозиционный характер реализации сохраниться, причём при увеличении числа подсистем наличие обратной связи превратит её в гомоморфный образ $\boldsymbol{S}$.

Контрольные системы в промежуточных формах можно построить и для объектов с континуальным временем, используя после коррекции процедуры синтеза, разработанные для случая дискретного времени. В них следует заменить разбиения $\mathbf{M}_{qq}(\mathfrak{u}_R)$ и $\mathbf{M}_{xq}(\mathfrak{u}_R)$ разбиениями $\mathbf{M}_{qq'}(\mathfrak{u}'_R)$ и $\mathbf{M}_{xq'}(\mathfrak{u}'_R)$ и порождающие функции первой пары порождающими функциями второй. В результате левое равенство соотношения (5.13) перейдёт в $\mathbf{J}_{\boldsymbol{r}Q}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}) =$ $= \boldsymbol{\delta}_{\mathfrak{u}R}[\boldsymbol{M}_{xq'}^{\mathfrak{u}'_R}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})]$, а алгебраическая модель (5.12) — в

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_{xq'}(\mathfrak{u}'_R) \arrow[r] & \mathfrak{u}'_R \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \mathfrak{u}_R \arrow[r] & \mathfrak{w}_R \arrow[ll, bend right] & \mathbf{M}_{xy}(\mathfrak{w}_R). \arrow[l] \\ & & \mathfrak{u} \arrow[ur, bend right] & & \end{tikzcd}$$

Полученные соотношения позволяют синтезировать $\boldsymbol{S}_K$ в промежуточной форме для случая континуального времени ценой сравнительно малых вычислительных затрат. Хуже обстоит дело при синтезе декомпозиционных форм, так как необходимость определения функций вида $\mathbf{J}_{\boldsymbol{u}i}[\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q})]$ сильно усложняет выкладки.

В шестой главе диссертационной работы предложенные методы синтеза средств ФД использованы для ФД устройства формирования и обработки сигналов широкополосной радиотехнической системы ближней навигации (РСБН), в состав которого входят устройство кодирования, устройство обработки дальномерного сигнала, устройство декодирования информации и управляющее микропроцессорное устройство. Задача диагностирования решена как совокупность частных диагностических задач каждого блока отдельно.

Все синтезированные средства из-за ограниченного объёма автореферата представить невозможно, поэтому ниже приведено наиболее характерное решение: средства ФД для устройства обработки дальномерного сигнала. Оно (рис. 6.1) представляет собой фильтр сжатия 13-разрядного кода Баркера, кроме того, в нём фиксируется захват несущей системой ФАПЧ.

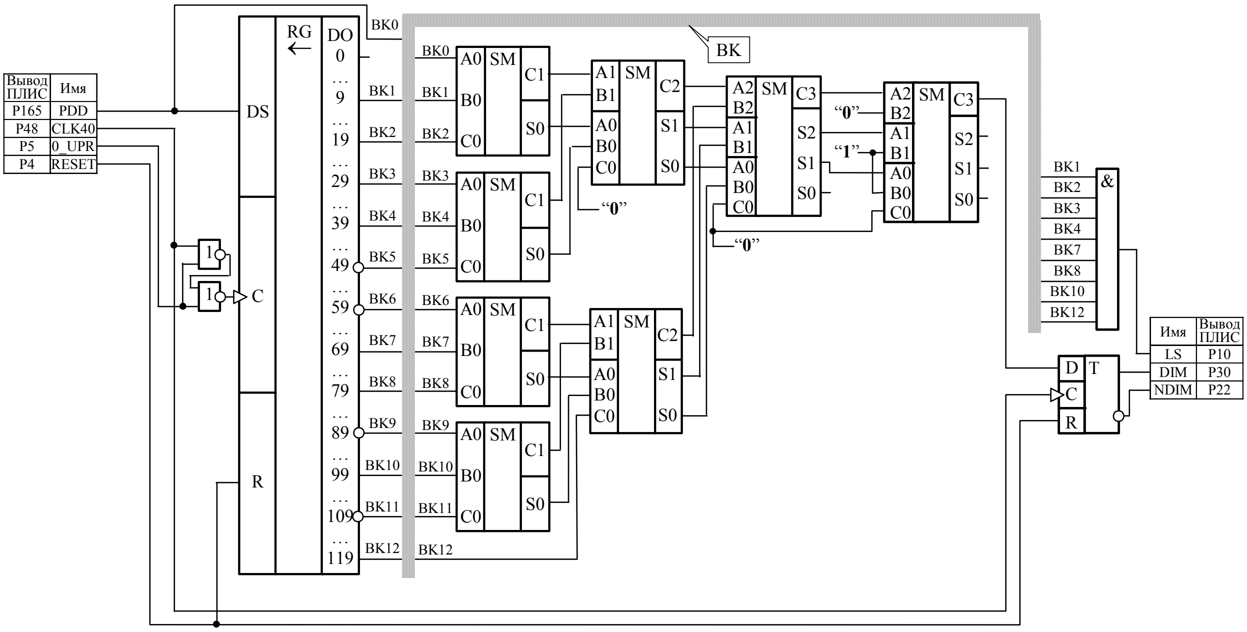


Рис. 6.1. Устройство обработки дальномерного сигнала

Анализируя объект диагностирования можно убедиться, что он представляет собой конечный автомат в форме логической задержки с числом внутренних состояний, превышающим 10^{36}, и малоразмерным вектором выхода, из чего следует реализация контрольной системы в той же форме и необходимость использования двухкомпонентного диагностического отображения $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}_Q, \boldsymbol{r}_Y)$. Положив $\boldsymbol{r}_Q(\boldsymbol{q})=q_0+q_{10}+q_{20}+\ldots+q_{110}+q_{120}$ и $\boldsymbol{r}_Y(\boldsymbol{y})=(y_0, y_1)$, где q_i — компоненты ВК($i/10$) шины ВК, а y_0 и y_1 — выходы LS и DIM устройства соответственно, синтезируем искомые средства диагностирования. В их состав войдут два десятиразрядных регистра сдвига, сумматор с фиксатором переноса, десятивходовая схема "И" (контрольная система), два сумматора по модулю два и выходная сборка (дискриминатор ошибок) — рис. 6.2.

Сравнение устройства обработки дальномерного сигнала с его диагностическими средствами показывает достаточно высокую эффективность решения поставленной задачи. Так, при реализации обоих устройств на матрицах ПЛИС типа"Spartan Xilinx", вводимая избыточность, определённая по задействованному числу компонентов матрицы, составляет не более 20% от объёма безызбыточной системы.

В **Заключении** дается перечень основных результатов диссертационной работы и сделана оценка этих результатов.

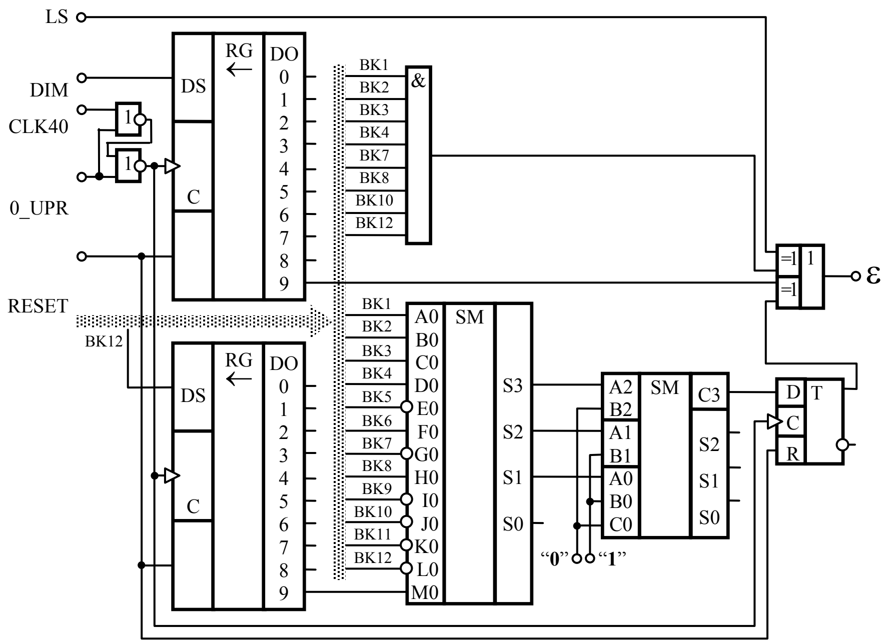


Рис. 6.2. Средства ФД для устройства обработки дальномерного сигнала

Основные результаты работы

1. Установлено, что решение задачи ФД, в сущности, сводится к выявлению на системных множествах объекта диагностирования нескольких разбиений с особыми свойствами, т. е. искомые решения находятся в соответствующих решётках разбиений. На основе установленного факта введена базовая форма ФД конечномерных динамических систем общего вида и определены требования к математическим конструкциям, ориентированным на решение поставленной задачи.
2. Элементы упоминавшихся конструкций, решёток разбиений, предложено задавать через порождающие функции. Использование такого задания позволило как для конечных, так и для континуальных полных решёток разработать ряд способов выполнения решёточных операций и решения решёточных неравенств. В отличие от известных ранее среди этих способов помимо табличных имеют место и чисто аналитические.
3. В качестве второй математической конструкции выбраны алгебры пар. Алгебры обобщены на континуальный случай. Подробно исследованы свойства обобщённых алгебр на декартовых произведениях дискретных и континуальных решёток, для которых разработаны процедуры вычисления основных алгебраических операторов.
4. Введены системные алгебры пар, однозначно определяемые объектом диагностирования, причём для систем с континуальным временем системные алгебры введены впервые. Для пары алгебр, связывающей множества состояний континуальных систем впервые определено свойство квазиподстановки, алгебраические характеристики которого подобны характеристикам свойства подстановки в дискретных системах.
5. Решена задача ФД на абстрактном уровне. Определены необходимые и достаточные условия осуществления ФД в базовой форме и условия существования диагностического отображения.
6. Предложена алгебраическая модель ФД динамических систем. В отличие от ранее из-

вестных, модель справедлива для произвольных динамических систем. Предложена универсальная каноническая форма реализации алгебраической модели ФД.

7. Рассмотрены предельные варианты реализации алгебраической модели ФД: с помощью контрольной системы в форме функциональной задержки и с помощью гомоморфной контрольной системы. Для обоих вариантов предложены процедуры синтеза средств диагностирования, минимизирующие вводимую избыточность по порядку.
8. Предложены варианты реализации алгебраической модели ФД, занимающие промежуточное место между гомоморфной формой и формой функциональной задержки. Для промежуточных вариантов разработаны процедуры синтеза контрольных систем в канонической форме и в форме последовательной декомпозиции.
9. С помощью разработанных на основе теоретической части процедур построены средства ФД для узлов перспективной радиотехнической системы ближней навигации.

В **Заключении** также отмечено, что введённые в диссертационной работе обобщённые алгебры пар можно использовать для решения не только задач ФД, но и задач управляемости, наблюдаемости и редукции систем, а также поиска декомпозиций.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих печатных трудах.

<u>Публикации в изданиях из перечня ведущих рецензируемых изданий, рекомендованных в действующем перечне ВАК:</u>

1. Подкопаев Б.П. Алгебраическая модель аппаратного контроля автоматов [Текст] / В.В. Данилов, Н.В. Колесов, Б.П. Подкопаев // Автоматика и телемеханика, 1975. № 6 — с. 118 – 125.

2. Подкопаев Б.П. Аналитическая процедура вычисления операторов алгебр пар и ее применение к задаче синтеза диагностирующих автоматов [Текст] / Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // Автоматика и вычислительная техника, 1983. № 6 — с. 66 – 67.

3. Подкопаев Б.П. Бесперебoрное вычисление алгебраических операторов в пространствах состояний динамических систем [Текст] / Б.П. Подкопаев, В.Н. Смирнов // Известия ГЭТУ, СПб.: Издательско-полиграфический центр ГЭТУ, 1997. Вып. 508: Обработка сигналов и полей в радиотехнических устройствах и системах — с. 44 – 48.

4. Подкопаев Б.П. Двухэтапная процедура синтеза схем функционального диагностирования для сетей автоматов [Текст] / Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1984. Вып. 349 — с. 53 – 56.

5. Подкопаев Б.П. Диагностика неисправностей в автоматах Мили [Текст] / В.В. Данилов, Н.В. Колесов, Б.П. Подкопаев, Б.И. Филимонов, В.С. Толстяков // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1974. Вып. 156 — с. 55 – 60.

6. Подкопаев Б.П. Диагностирование цифровых устройств РТС [Текст] / Н.В. Колесов, Б.П. Подкопаев, В.С. Толстяков // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1986. Вып. 370 — с. 101 – 106.

7. Подкопаев Б.П. Использование спектральных и автокорреляционных свойств логических функций для синтеза комбинационных схем на каскадах Майтра [Текст] / В.В. Данилов, Б.П. Подкопаев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1980. № 1 — с. 112 – 120.

8. Подкопаев Б.П. Использование характеристических функций для выполнения адди-

тивных решёточных операций в пространствах Хэмминга [Текст] / Б.П. Подкопаев // Известия СПбГЭТУ, СПб.: СПБГЭТУ, 2002. Вып. 558, Серия «Радиоэлектроника и телекоммуникации», № 2 — с. 7 – 12.

9. Подкопаев Б.П. К вопросу о синтезе комбинационных схем на сумматорах по модулю два и одном пороговом элементе [Текст] / Б.П. Подкопаев, Д.О. Яковлев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1973. № 5 — с. 122 – 126.

10. Подкопаев Б.П. Контролепригодные структуры автоматов на регистрах сдвига [Текст] / Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // Электронное моделирование, 1984. Т. 6, № 5 — с. 52 – 57.

11. Подкопаев Б.П. Надежность систем с диагностированием [Текст] / Б.П. Подкопаев // Известия ГЭТУ, СПб.: СПбГЭТУ, 1995. Вып. 487 — с. 61 – 66.

12. Подкопаев Б.П. Об одном методе приведения автоматов [Текст] / А.Н. Жирабок, Б.П. Подкопаев // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1980. Вып. 265 — с. 52 – 55.

13. Подкопаев Б.П. О реализации алгебраической модели аппаратного контроля автоматов [Текст] / Б.П. Подкопаев, Н.С. Щербаков // Автоматика и вычислительная техника, 1980. № 3 — с. 58 – 64.

14. Подкопаев Б.П. Оценка надёжности бортовой аппаратуры РСБН со средствами диагностирования и восстановления [Текст] / А.Г. Герчиков, В.К. Орлов, Б.П. Подкопаев // Вопросы радиоэлектроники. Серия РЛТ, 2009. Вып. 2 — с. 12 – 20.

15. Подкопаев Б.П. Тестовое диагностирование цифровых устройств радиосистем в процессе функционирования [Текст] / Н.В. Колесов, Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // Вопросы радиоэлектроники. Серия ОВР, 1983. Вып. 13 — с. 116 – 124.

16. Подкопаев Б.П. Функциональное диагностирование автоматов структурным методом контроля по модулю два [Текст] / Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1982. Вып. 308 — с. 88 – 92.

17. Подкопаев Б.П. Функционально связанные структуры как аппарат связи алгебр пар и динамических систем [Текст] / Б.П. Подкопаев // Известия ЛЭТИ, Л.: ЛЭТИ, 1991. Вып. 440 — с. 35 – 39.

Авторские свидетельства и патенты

18. Многоканальный сигнатурный анализатор [Текст] / а. с. №1718220 СССР: МПК G06F 11/00 Иванов С.А., Подкопаев Б.П., Смирнов В.Н., Филиппов Ф.В., Щербаков Н.С.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — № 4784919/24 заявл. 22.01.1990; опубл. 07.03.1992, Бюл. №9 — 5 с., ил.

19. N-канальный линейный цифровой фильтр с контролем [Текст] / а. с. №1325512 СССР: МПК G06F 15/353, H03 H17/06, G06F 11/00 Колесов Н.В., Мосягин В.В., Подкопаев Б.П.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — №4063345/24-24 заявл. 19.03.1986; опубл. 23.07.1987, Бюл. №27 — 4 с., ил.

20. Счетчик с коррекцией ошибок [Текст] / а. с. № 656218 СССР: МПК H03K 23/02 Жирабок А.Н., Подкопаев Б.П., Сошин М.П., Яковлев Д.О.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — №2558923/18-21 заявл. 26.12.1977; опубл. 05.04.1979, Бюл. № 13 — 4 с., ил.

21. Устройство для контроля цифровых блоков [Текст] / пат. №2065202 Рос. Федерация: МПК G06F 11/22 Иванов С.А., Подкопаев Б.П., Смирнов В.Н.; заявитель и патентообладатель: СПб., Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И. Ульянова (Ленина). — №5014790/09 заявл. 04.12.1991; опубл. 10.08.1996, Бюл. №22 — 2 с., ил.

22. Устройство непрерывного тестового диагностирования линейных динамических систем [Текст] /а. с. № 983710 СССР: МПК G06F 11/00, G05B 23/02 Колесов Н.В., Подкопаев Б.П., Сошин М.П., Толстяков В.С.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — №3296435/18-24 заявл. 08.06 1981; опубл. 23.12.1982, Бюл. №47 — 4с., ил.

23. Устройство непрерывного тестового диагностирования линейных цифровых систем [Текст] / а. с. № 1163329 СССР: МПК G06F 11/26 Колесов Н.В., Подкопаев Б.П., Сошин М.П., Шумский А.Е.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — №3628341/24-24 заявл. 25.07.1983; опубл. 23.06.1985, Бюл. №23 — 6 с., ил.

24. Цифровая система с тестовым диагностированием [Текст] / а. с. №1176335 СССР: МПК G06F 11/26 Колесов Н.В., Подкопаев Б.П., Толстяков В.С., Шумский А.Е.; заявитель и правообладатель: Л., Ленинградский электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина). — №3627736/24-24 заявл.27.07.1983; опубл. 30.08.1985, Бюл. №32 — 4 с., ил.

В прочих рецензируемых изданиях

25. Подкопаев Б.П. Алгебраическая теория функционального диагностирования динамических систем [Текст] / Б.П. Подкопаев // Ч. 1: Системы, диагностирование систем, системные алгебры. — СПб.: ООО «Техномедиа» / Изд-во «Элмор», 2007. — 132 с.

26. Подкопаев Б.П. Диагностическое моделирование динамических систем с непрерывным временем [Текст] / Б.П. Подкопаев // Известия высших учебных заведений России, Радиоэлектроника, СПб, 1998. № 1 — с. 36 – 41.

27. Подкопаев Б.П. О взаимосвязи некоторых моделей аппаратного контроля автоматов [Текст] / Б.П. Подкопаев, Н.С. Щербаков // Логическое управление в промышленности, М.: Атомиздат, 1978. Вып. 1, с. 70 – 74.

28. Подкопаев Б.П. Основы технической диагностики цифровых устройств [Текст] / Б.П. Подкопаев // Учебное пособие. — СПб.: Издательско-полиграфи-ческий центр ГЭТУ, 1996. — 64 с.

29. Подкопаев Б.П. Отказоустойчивые цифровые устройства радиотехнических систем [Текст] / Ю.М. Казаринов, Б.П. Подкопаев, В.Н. Смирнов // Учебное пособие. Л.: ЛЭТИ, 1991. — 60 с.

30. Подкопаев Б.П. Радиотехнические системы: Учебник для студ. высш. учеб. заведений [Текст] / [Ю.М. Казаринов и др.]; под ред. Ю.М. Казаринова // М: Изд. центр «Академия», 2008. — 592 с.

31. Подкопаев Б.П. Структурная теория аппаратного контроля цифровых автоматов [Текст] / Н.С. Щербаков, Б.П. Подкопаев // М.: Машиностроение, 1982. — 191 с.

32. Подкопаев Б.П. Элементарное введение в теорию групп [Текст] / Б.П. Подкопаев // Учебное пособие. СПб.: Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. — 64 с.

В сборниках трудов международных конференций

33. Подкопаев Б.П. Алгебры пар на решётках, связанных по отображению [Текст] / Б.П. Подкопаев // Материалы международной научно-практической конференции VI Царскосельские чтения, СПб.: Лен. гос. обл. университет им. А. С. Пушкина, 2002. — Т. VI, с. 3 – 6.

34. Подкопаев Б.П. Минимизация векторных функций, индуцирующих разбиения на элементах конечномерных континуальных пространств [Текст] / Б.П. Подкопаев // Материалы международной научно-практической конференции VI Царскосельские чтения, СПб.: Лен. гос. обл. университет им. А. С. Пушкина, 2002. — Т. VI, с. 6 – 9.

35. Подкопаев Б.П. Надежность систем с диагностированием, работающих спорадически [Текст] / Б.П. Подкопаев, В.Н. Смирнов // Международная НТК «Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность – 96», СПб.: ГЭТУ, 1996. — с. 96 – 97.

36. Подкопаев Б.П. Решение решеточных неравенств при функциональном диагностировании динамических систем с непрерывным временем [Текст] / Б.П. Подкопаев, В.Н. Смирнов // Международная НТК «Диагностика, информатика, метрология, экология, безопасность – 97», СПб.: ГЭТУ, 1997. — с. 80.

В сборниках трудов региональных конференций

37. Подкопаев Б.П. Аппаратный контроль автоматов Мура по входному и выходному алфавитам [Текст] / Б.П. Подкопаев, Н.С. Щербаков // Всесоюзная конференция «Логическое управление в промышленности», М.: МДНТН, 1977. — с. 43 – 48.

38. Подкопаев Б.П. Диагностическое моделирование поведения аналоговых динамических систем в пространстве состояний [Текст] / Б.П. Подкопаев // VI Всесоюзное совещание «Техническая диагностика», М.: Институт проблем управления, 1987. — с. 30.

39. Подкопаев Б.П. Избыточные контролепригодные структуры управляющих автоматов на регистрах сдвига [Текст] / Б.П. Подкопаев, А.Е. Шумский // VIII симпозиум по проблемам избыточности в информационных системах, Л.: ЛИАП, 1983. — ч. 3, с. 146 – 149.

40. Подкопаев Б.П. Использование парных алгебр для функционального контроля автоматов [Текст] / В.В. Данилов, Н.В. Колесов, Б.П. Подкопаев // IV симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах, Л.: ЛИАП, 1983. — ч. 3., с. 32 – 36.

41. Подкопаев Б.П. Построение общей диагностической модели цифровых устройств [Текст] / Б.П. Подкопаев, В.Н. Смирнов // 51 НТК НТОРЭС им. А.С. Попова, СПб.: ВНТОРЭС им. А. С. Попова, 1996. — с. 95.

42. Подкопаев Б.П. Применение алгебры пар к решению задач функционального диагностирования цифровых устройств [Текст] / А.Н. Жирабок, Б.П. Подкопаев // Проектирование, контроль и диагностика микропроцессорных систем, Саратов: СГУ, 1986. — с. 46 – 50.

43. Подкопаев Б.П. Синтез автоматов с обнаружением и исправлением ошибок на регистрах сдвига [Текст] / Б.П. Подкопаев // II Всесоюзная конференция «Проблемы надежности при проектировании систем управления», Киев: Институт кибернетики, 1976. — с. 65–66.