

На правах рукописи

**Беспалов Александр Викторович**

**МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО  
ПЕРВОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ ЛЯПУНОВА**

Специальность: 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (технические системы)

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Санкт - Петербург – 2011

Работа выполнена в Санкт–Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Научный руководитель –  
доктор технических наук, профессор Николай Дмитриевич Поляхов

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор Алексей Алексеевич Бобцов, заведующий кафедрой «Систем управления и информатики», Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. – СПбНИУ ИТМО;

кандидат технических наук, доцент кафедры «Электротехники, вычислительной техники и автоматизации» Ольга Петровна Томчина, Санкт-Петербургский институт машиностроения (ПИМаш).

Ведущая организация – государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им.Д.Ф. Устинова (БГТУ «ВОЕНМЕХ» им.Д.Ф. Устинова)

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 212.238.07 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина) по адресу: 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ученый секретарь  
совета по защите докторских и  
кандидатских диссертаций

В.В. Цехановский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Для многих технологических процессов характерно стремление организовывать работу всех аппаратов и устройств в устойчивом статическом режиме. За исключением редких случаев устойчивость процессов происходящих в системе является залогом ее работоспособности и стабильности в работе. В то же время, при проектировании сложных систем стремятся получить наиболее простую динамику для всех элементов системы, для обеспечения предсказуемости поведения системы в целом. Процессы с нелинейной динамикой зачастую являются плохо управляемыми, сложная динамика определяет большие нагрузки на систему и более быстрый выход ее из строя. Также игнорирование какого-либо малозначительного параметра в нелинейной системе при незначительных его вариациях в ходе эксплуатации может приводить к некорректному поведению системы.

Например, флаттер – сочетание самовозбуждающихся незатухающих колебаний элементов конструкции самолёта - возникает при несовпадении центра жесткости с центром давления, при недостаточной жесткости конструкции. По достижении определенного значения скорости флаттер приводит к разрушению самолета.

В работе Д. Рюэля и Ф. Такенса «О природе турбулентности» была предложена теория, объясняющая возникновение сложных колебаний с использованием «странных аттракторов» – притягивающих множеств в фазовом пространстве, на которых траектория системы неустойчива. На основе данного подхода было доказано, что хаотические колебания возникают в детерминированных нелинейных системах с размерностью три или выше. Также было показано, что хаотические системы обладают огромной чувствительностью к начальным условиям.

Определенная часть сложных динамических систем, - технических и проч., проходит через явления, которые сопряжены с хаосом. В случае автоматических систем, чаще всего подобные явления вызывают поломку или дисфункцию составных частей системы.

Таким образом, исследование возникновения хаотических явлений и их динамики является перспективным направлением исследований прогнозирования и предсказания технических неисправностей. Открытие хаотического поведения в детерминированных системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, с одной стороны сделало невозможной глобальную предсказуемость, а с другой – дало инструмент для анализа данных полученных в ходе экспериментов.

В силу изначальной сложности изучаемых объектов при разработке теории хаоса появилось большое количество уникальных численных и аналитических методик, оценивающих параметры хаотической системы. Многие из них применимы для сложных нехаотических систем и перспективны с точки зрения практического применения. Одной из таких методик является расчет первого показателя Ляпунова. Данный показатель является индикатором стремления системы к равновесию. Известно, что наличие в спектре характеристических показателей системы хотя бы одного положительного ляпуновского показателя

означает неустойчивость фазовой траектории. Следовательно, одной из основных задач при оценке устойчивости является нахождение наибольшего ляпуновского показателя. Несмотря на большое количество работ в данной области, практические аспекты теории разработаны недостаточно. Таким образом, данное направление исследований, несомненно, является актуальным.

**Цели и задачи исследований.** Целью данной диссертационной работы является разработка методов расчета первого показателя Ляпунова для систем с нехаотической динамикой, а также реализация программного комплекса для оценки устойчивости и прогнозирования состояния системы на основе оценки первого показателя Ляпунова.

**В диссертационной работе решаются задачи:**

- 1) модификация методов Вольфа, Сано/Савадо/Экманна и Розенштейна для оценки устойчивости временного ряда по первому показателю Ляпунова;
- 2) создание методов для оценки устойчивости временного ряда на основе расчета первого показателя Ляпунова;
- 3) обоснование адекватности созданных методов для различных классов нелинейных систем;
- 4) исследование точности разработанных методов, а так же их преимуществ и характерных свойств;
- 5) анализ локальной во времени устойчивости моделей сложных объектов.
- 6) создание программного комплекса, реализующего разработанные методы и инструментарий исследования устойчивости систем с позиции теории хаоса.

**Предмет и объект исследований.** Предметом исследования являются методы нелинейной, хаотической и нехаотической динамики, применяющиеся для анализа поведения систем и выявления возможности появления хаотических колебаний. Объектом исследования являются нелинейные и нестационарные динамические системы и их устойчивость.

**Методы исследований.** При проведении исследований и разработок были использованы аналитические и численные подходы, а также методы теории управления и методы теории нелинейных систем. В процессе математического моделирования применялись методы расчета разностных схем дифференциальных уравнений в средах программирования C#, MATLAB, Matlab/Simulink.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие научные положения:

1. Модификации методов Вольфа, Сано/Савадо/Экманна, Розенштейна и метода наименьших квадратов для расчета первого показателя.
2. Новые методы расчета первого показателя для временных рядов: логарифмический метод, интерполяционный метод и метод выделения логарифма.
3. Синтез оптимальных параметров процедуры расчета первого показателя в разработанных методах и модификациях.
4. Инструментарий исследования устойчивости нелинейных, хаотических и нестационарных систем на базе разработанных методов.

**Научная новизна:**

1. Модификации методов Вольфа, Сано/Савадо/Экманна, Розенштейна и метода наименьших квадратов, обеспечивающие возможность вычисления

первого показателя Ляпунова для временного ряда, порожденного системой с нехаотическим поведением.

2. Новые методы расчета первого показателя для временных рядов: логарифмический метод, интерполяционный метод, метод выделения логарифма, отличающиеся тем, что обеспечивают высокую точность оценки показателя в условиях небольшого количества точек исходного ряда и не являются расчетно-затратными.
3. Синтез оптимальных параметров процедуры расчета первого показателя в разработанных методах, обеспечивающий повышение точности расчета в 10-12 раз для стационарных линейных систем, в 4-6 раз для нелинейных и нестационарных систем со сложной динамикой по сравнению с базовыми неоптимизированными методами для тех же систем.
4. Инструментарий исследования устойчивости нелинейных и нестационарных систем на базе разработанных методов, обеспечивающий динамическое слежение за состоянием технической системы.

**Достоверность результатов.** При решении дифференциальных уравнений, описывающих динамику систем, использовались стандартные численные схемы и методы: метод Дорманда-Принса, соответствующий методу Рунге-Кутты 4–5-го порядка. Для проверки адекватности полученных вычислений первого показателя Ляпунова проводилось сравнение с известными теоретическими значениями показателей и со значениями, полученными другими авторами для типовых систем.

**Практическая значимость.**

Использованный в работе подход может успешно применяться при создании встраиваемого модуля, анализирующего данные датчиков на предмет локальной устойчивости с позиций разработанных алгоритмов. Использование подобного подхода может значительно повысить отказоустойчивость системы. Дополнительным достоинством модуля является то, что он не будет использовать ресурсы системы управления или шины данных, по которой передаются сигналы управления, и может существовать как автономный модуль, имеющий связи только с датчиками. Модуль также может служить для составления долгосрочного прогноза износа системы при работе в штатном режиме.

Имеются два акта о практическом использовании результатов диссертационной работы:

- в учебном процессе кафедры САУ СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
- в программном комплексе тестирования и мониторинга технических систем при проведении стендовых ресурсных испытаниях приводов, производимых ОАО «ПМЗ Восход».

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы представлены на международных научных конференциях “SCM” (Санкт-Петербург, 2007, 2008, 2010), интернациональной студенческой олимпиаде по автоматике Baltic Olympiad (Санкт-Петербург, 2004), всероссийской научной конференции УИТ-2005 (Санкт-Петербург, 2005), российской научной конференции КМУ-07 (Санкт-Петербург, 2007), в Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., гос. контракт № П979 от 27 мая 2010 г.

**Публикации.** Основные теоретические и практические результаты диссертации опубликованы в 7 работах, среди которых публикации в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных в действующем перечне ВАК - 3, а также 3 доклада и одна статья в других изданиях, перечисленных в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения, списка литературы, включающего 79 наименований. Основная часть работы изложена на 125 страницах машинописного текста. Работа содержит 25 рисунков.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность темы, поставлены цели и задачи исследований. Определены предмет и методы исследования. Выявлены научные результаты и их новизна. Во введении также содержится информация о практической значимости, апробации и структуре работы.

**Первая глава «Обзор существующих теорий»** содержит обзор основных достижений в области вычисления первого показателя, как меры локальной устойчивости системы. Обзор представлен в логико-хронологическом порядке и дает представление о том, каким образом происходило развитие идей расчета показателя.

Приведено определение показателей Ляпунова как характеристик устойчивости направлений движения траектории системы. Вводятся понятия первого показателя и «правильных по Ляпунову» систем. Во втором параграфе рассматривается алгоритм Беннетина, который лежит в основе всех расчетов показателей Ляпунова, но применим только в случае, если заранее известны уравнения движения системы.

Далее рассматривается базовый алгоритм Вольфа для расчета показателя с по временным рядам. Представлена модификация с постоянным временем эволюции. Кроме того, изложены и другие методы расчета тех же показателей. Один из них был представлен Д.-П. Экманном и отдельно от М. Сано и У. Савадо. Метод Сано-Савадо-Экманна обладает хорошей точностью, но в то же время противоречивыми требованиями в подборе параметров и высокой вычислительной сложностью. Также представлен метод Розенштейна, который из всех базовых методов выделяется оптимальным по соотношению сложности вычислений и точности расчета. Точность расчета в этом методе достигается за счет двойного усреднения.

**Вторая глава «Методы расчета первого показателя для устойчивых систем»** содержит описание модификаций, представленных ранее алгоритмов расчета первого показателя для систем с относительно регулярной динамикой, не содержащей хаотических колебаний. Также в данной главе предложены алгоритмы для расчета показателей устойчивых систем.

Представлена модификация метода Вольфа для расчета первого показателя. В данной модификации исследуется временной ряд, представляющий собой численное решение некоторого дифференциального уравнения с постоянным шагом времени  $\Delta t$  и одним состоянием равновесия типа - фокус:

$$x(t) = (x(t_0), x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n)), \quad (1)$$

где  $t_n = t_0 + n\Delta t$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $N$  – количество точек решения.

Ряд нормируется таким образом, чтобы состояние равновесия соответствовало нулю. Производится реконструкция (методом запаздывания или производной) траектории в  $R$ -мерном фазовом пространстве. Составляется матрица  $X$  вида.

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots \\ x_{0+\delta} & x_{1+\delta} & \dots \\ x_{0+2\delta} & x_{1+2\delta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix},$$

где  $x_n = x(t_n)$ ,  $\delta$  - натуральное число (шаг реконструкции).

Матрица  $X$  представляется в виде вектора  $V = [P_0 \ P_1 \ \dots \ P_N]$ , содержащего координаты точек в реконструированном фазовом пространстве  $P_n = [x_n \ x_{n+\delta} \ \dots]$ . После этого с шагом  $T$  для вектора  $V$  рассчитывается компонента показателя

$$\varepsilon_k = \ln \frac{\|P_\infty - P_{kT}\|}{\Delta x_0},$$

где  $P_\infty$  - вектор из нулей,  $\dim(P_\infty) = R$ ,  $\Delta x_0$  - начальное расхождение, рассчитываемое по формуле  $\Delta x_0 = \|P_\infty - P_0\|$ . После каждого расчета компоненты происходит перенормировка ряда таким образом, чтобы начальное расхождение  $\Delta x_0$  для каждого следующего компонента совпадало. Процедура расчета повторяется. Первый показатель рассчитывается по следующей формуле:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{k=1}^M \varepsilon_k}{TM}.$$

где  $M$  – количество итераций расчета.

Отличие данной модификации от алгоритма Вольфа состоит в том, что в качестве близкой траектории изначально выбирается состояние равновесия, и оценивается сходимость к нему траектории движения системы. Это решает проблему выбора ближайшей траектории. Далее рассматривается модификация метода Розенштейна для расчета первого показателя. Отличие от оригинального алгоритма заключается в методе поиска соседей. В одном случае вместо усреднения расхождения между всеми ближайшими соседями берется расхождение с состоянием равновесия, и, соответственно, необходимость во втором усреднении пропадает. В другом случае у точки  $x(0)$  (Рис. 1.) находится один ближайший сосед  $n(0)$ .

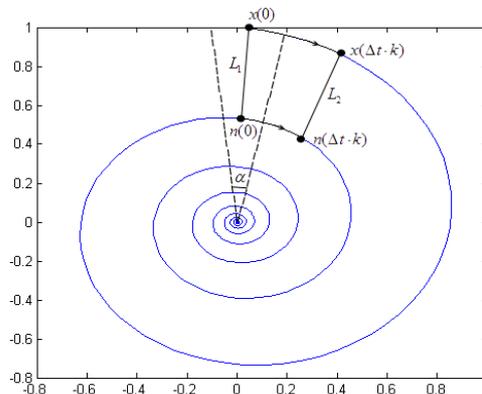


Рис. 1.

Положение соседа находится из условия, что угол между начальной точкой, «соседней точкой» и состоянием равновесия должен быть меньше наперед заданного угла  $\alpha$ . После нахождения  $n(0)$  из обеих точек траектории эволюционируют на  $\Delta t \cdot k$ , где  $\Delta t$  – шаг расчета, а  $k$  – натуральное число, и оценивается получившееся расхождение двух траекторий  $L_1$  и  $L_2$ . Первоначально алгоритм проходит так же, как и модифицированный алгоритм Вольфа. Для ряда (1) составляется  $V$  – вектор координат точек в реконструированном фазовом пространстве. Для каждого  $P_n$ , кроме  $n=0$ , считается  $\cos(\alpha_n)$ , где  $\alpha_n$  – угол между двумя векторами  $P_n O$  и  $P_0 O$ ;  $O$  – начало координат. Косинус считается по стандартной формуле

$$\cos(\alpha_n) = \frac{P_0 O \cdot P_n O}{|P_0 O| |P_n O|}$$

Для всех точек  $P_n$  выбираются те, у которых  $\cos(\alpha_n)$  меньше наперед заданного значения  $\cos(\alpha)$ . Из них выбирается ближайшая, но не находящаяся в непосредственной близости к точке  $P_0$  точка  $P_s$ . В случае, если такая точка не находится, в качестве  $P_s$  выбирается начало координат. Первый показатель оценивается по формуле

$$\lambda_1 = \frac{1}{N - s - \Delta t \cdot k} \sum_{i=0}^{N-s-\Delta t \cdot k} \frac{\ln(\|P_{o+i} P_{s+i}\|) - \ln(\|P_{i+\Delta t \cdot k} P_{s+i+\Delta t \cdot k}\|)}{\Delta t \cdot k}$$

Далее излагается «логарифмический» метод. Элементы ряда (1) преобразуются следующим образом:

$$x'_i = \ln|x(t_0 + i\tau) + \varepsilon|, \quad i = \overline{0, N-1}$$

где  $\tau$  – шаг дискретизации. Модуль используется, чтобы исключить влияние знака на значение логарифма. Относительное рассогласование с состоянием равновесия остается таким же, хоть и меняется знак производной. Введение малой величины  $\varepsilon$  исключает бесконечность логарифма в точках  $x(t) = 0$ . Для нового получившегося ряда производится реконструкция и составляется матрица  $X$  представленного выше вида. После этого из матрицы  $X$  рассчитывается среднее суммарное отображение  $s$  по всем сдвинутым относительно друг друга во времени реконструированным рядам

$$s_i = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^R x'_j, \quad i = \overline{1, N}$$

После дополнительной фильтрации  $s$  можно посчитать первый показатель по следующей формуле:

$$\lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{s_{i+1} - s_i}{\tau}$$

Возможность использования метода наименьших квадратов для нахождения первого показателя также рассмотрена. Первый показатель Ляпунова имеет смысл вещественной части корня характеристического полинома линеаризованной системы, находящегося ближе всего к мнимой оси. Следовательно, он так же является показателем наиболее влияющей на динамику экспоненты в ее решении. Таким образом, имея в качестве объекта исследования временной ряд, порожденный динамикой некой системы, можно сопоставить динамике системы

экспоненту вида  $A + Ce^{\lambda t}$ . Для метода наименьших квадратов задача переформулируется следующим образом:

$$S(\lambda, A, C) = (x(t) - f(t, \lambda, A, C))^2 \rightarrow \min,$$

где  $f(t, \lambda, A, C)$  функция представления приближенного решения ДУ (в нашем случае это  $A + Ce^{\lambda t}$ ,  $A, C$  - константы.). В случае если требуется учесть колебания, можно сформулировать задачу следующим образом:

$$S(\lambda, A, \omega, C_1, C_2) = (x(t) - f(\lambda, A, \omega, C_1, C_2))^2 \rightarrow \min,$$

где  $f(\lambda, A, \omega, C_1, C_2) = A + e^{\lambda t}(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))$ . В этом случае для расчета не будет требоваться дополнительная реконструкция и усреднение по рядам с задержками. Далее представлен алгоритм расчета, основанный на интерполяции временного ряда. В нем приводится три модификации этого алгоритма.

**Интерполяционный метод.** Решение уравнения представляется в виде

$$x(t) = Ce^{-\lambda t} + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – состояние равновесия,  $\lambda$  – первый показатель Ляпунова,  $C$  – константа. Производная от такого решения будет выглядеть как

$$\dot{x}(t) = -\lambda Ce^{-\lambda t}.$$

Соответственно, если  $\varepsilon = 0$ , можно найти показатель в виде

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{-\lambda Ce^{-\lambda t}}{Ce^{-\lambda t} + 0} = -\lambda.$$

Для такого случая показатель является усреднением отношения точек производной временного ряда к точкам самого ряда. Но нулевое состояние равновесия без отклонений бывает редко. Поэтому, если ошибка не равна 0, необходимо действовать следующим образом. Дан числовой ряд, представляющий собой численное решение некоторого дифференциального уравнения с постоянным шагом времени  $\Delta t$ :

$$x(t) = (x(t_0), x(t_0 + \Delta t), x(t_0 + 2\Delta t) \dots x(t_0 + (N - 1)\Delta t)),$$

где  $N$  – количество точек решения. Обозначим  $x(t_0 + i\Delta t)$ , как  $x_i$ . Представим, что шаг временного ряда равен  $k\Delta t$ , где  $k$  – натуральное число. Для него получена формула для расчета первого показателя

$$\lambda = - \frac{\sum_{i=1}^{N-2k} \ln \left( \frac{x_{i+2k} - x_{i+k}}{x_{i+k} - x_i} \right)}{N - 2k}.$$

**Алгоритм запаздывания.** Взятие производной, особенно для зашумленных сигналов, приводит к серьезному увеличению ошибки расчета. Для устранения этих трудностей была разработана модификация предыдущего алгоритма, использующая для расчета не производную, а реконструкцию с запаздыванием. Для данной модификации получена следующая формула для расчета первого показателя:

$$\lambda = - \frac{\sum_{i=r}^{N-1-k} \ln \left( \frac{x_{i+k} - x_{i+k-r}}{x_i - x_{i-r}} \right)}{N - r - k} ,$$

где  $r$  - выбранное для реконструкции запаздывание.

**Алгоритм двойного запаздывания.** При расчете показателя довольно большое влияние на точность расчета оказывает периодическая составляющая процесса. В представленной модификации алгоритма расчета рассматривается следующий способ избавления от периодической составляющей. Для временного ряда решение уравнения представляется в виде:

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \sin(\alpha t) + C_2 \cos(\alpha t)) , \quad (2)$$

где  $\lambda$  - первый показатель Ляпунова,  $C_1, C_2$  - константы,  $\alpha$  - частота колебаний. Используя метод Юниса<sup>1</sup>, можно представить решение в таком виде:

$$x(t) = C e^{-\lambda t} \sin(\alpha t + \gamma) ,$$

где  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\gamma = \arcsin\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\right)$ . Предполагая, что период колебаний синуса

намного меньше по времени, чем экспоненциальное затухание, считаем, что сдвинутый ряд описывается такой функцией:

$$x_d(t) = C e^{-\lambda t} \sin(\alpha t + \varphi + \gamma) ,$$

где  $\varphi$  - фазовый сдвиг ряда с запаздыванием. Выбирая  $\varphi$  таким образом, чтобы оно равнялось  $\frac{\pi}{2}$ , получаем

$$x_d(t) = C e^{-\lambda t} \cos(\alpha t + \gamma) .$$

В результате можно получить

$$\sqrt{x^2(t) + x_d^2(t)} = C e^{-\lambda t} .$$

Таким образом, для реального ряда, поведение которого описывается функцией (2), влияние периодической составляющей, если не полностью исчезает, то значительно снижается. Используя это преобразование, выводится следующая формула расчета первого показателя:

$$\lambda = - \frac{\sum_{i=r+d}^{N-1-k} \ln \left( \sqrt{\frac{(x_{i+k} - x_{i-r+k})^2 + (x_{i+k-d} - x_{i-r-d+k})^2}{(x_i - x_{i-r})^2 + (x_{i-d} - x_{i-r-d})^2}} \right)}{N - k - r - d} ,$$

где  $r, d$  - выбранные для реконструкции запаздывания,  $k$  - шаг расчета производной. После этого рассматриваются модификации временного ряда, помогающие исключить сильно затрудняющие влияния на расчет параметров. В частности, рассматривается преобразование, исключаящее точки равновесия при расчете. Для временного ряда решение уравнения представляется в виде

<sup>1</sup> [http://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрические\\_тождества](http://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрические_тождества)

$$x(t) = Ae^{f(t)} + \varepsilon,$$

где  $A, \varepsilon$  – константы. Константа  $\varepsilon$  при  $f(t) < 0, t \rightarrow \infty$  является точкой равновесия. Предположим, что существует такая же функция, но с запаздыванием по времени.

$$x_\tau(t) = Ae^{f(t+\tau)} + \varepsilon, \text{ где}$$

$\tau$  - шаг запаздывания. При вычитании  $x(t)$  и  $x_\tau(t)$  избавляемся от  $\varepsilon$ :

$$y(t) = A(e^{f(t)} - e^{f(t+\tau)}) \approx Ae^{f(t)}(1 - n).$$

Если предположить  $A$  и  $(1 - n)$  константами, то функцию  $y(t)$  можно представить в таком виде:

$$y(t) = Ce^{f(t)}.$$

**Преобразование выделения логарифма.** Для временного ряда решение уравнения представляется в виде:

$$x(t) = Ae^{f(t)},$$

где склонность системы к неустойчивости определяется не самой функцией  $f(t)$ , а ее производной. Производную можно посчитать следующими двумя путями.

1. Для функции  $x(t)$  находится ее производная по времени. Далее производная  $\dot{x}(t)$  делится на саму функцию  $x(t)$ .

$$\dot{f}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$$

Эта процедура названа **методом деления**.

2. От модуля функции  $x(t)$  берется логарифм и от  $\ln|x(t)|$  берется производная по времени:

$$\dot{f}(t) = \frac{d \ln|x(t)|}{dt}.$$

Эта процедура названа **методом логарифмирования**.

**Преобразование, исключая колебательную составляющую.** При расчете показателя довольно большое влияние на точность расчета оказывает периодическая составляющая процесса. Данное преобразование предлагает следующий алгоритм избавления от периодической составляющей. Для временного ряда решение уравнения представляется в виде

$$x(t) = Ae^{f(t)}(C_1 \sin(\alpha t) + C_2 \cos(\alpha t)),$$

где  $A, C_1, C_2$  константы,  $\alpha$ - частота колебаний. Можно представить  $x(t)$  в таком виде:

$$x(t) = Ce^{f(t)} \sin(\alpha t + \theta),$$

где  $C = A\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\theta = \arcsin(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}})$ . Далее, предполагая, что период колебаний синуса намного меньше по времени, чем экспоненциальное затухание, считаем, что сдвинутый во времени ряд описывается такой функцией:

$$x_\varphi(t) = Ce^{f(t)} \sin(\alpha t + \varphi + \theta),$$

где  $\varphi$  - фазовый сдвиг ряда с запаздыванием. Выбирая  $\varphi$  таким образом, чтобы оно равнялось  $\frac{\pi}{2}$ , получаем:

$$x_\varphi(t) = Ce^{f(t)} \cos(\alpha t + \theta),$$

$$\sqrt{x^2(t) + x_\varphi^2(t)} = Ce^{f(t)}.$$

Применим все эти преобразования к исходному временному ряду. Обратим

состояние равновесия в ноль, потом исключим колебания. Далее приводим ряд к виду экспоненциального затухания. После этого, используя преобразование выделения логарифма, находим значения производной функции  $f(t)$  в показателе наибольшей экспоненты принадлежащей решению нестационарного уравнения. Эта производная является критерием оценки локальной устойчивости.

В пакете Matlab/Simulink был реализован блок, воспроизводящий все этапы этого алгоритма; структурная схема показана на рис. 2.

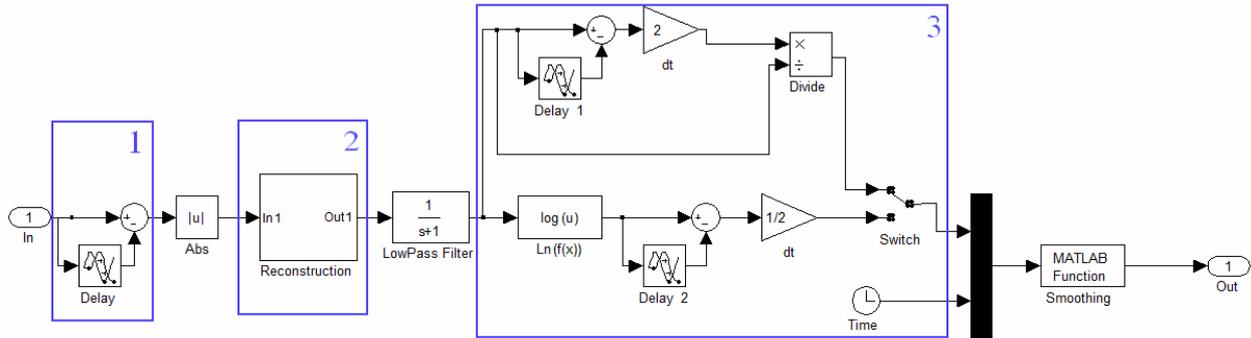


Рис.2. Структурная схема блока, реализующего алгоритм оценки первого показателя.

Далее рассматривается использование сингулярного SVD-преобразования для выделения тренда и получения значений первого показателя. Рассмотрим вещественный ряд  $x = (x_0, \dots, x_N)$ ,  $N > 2$  – длина ряда. Считаем, что временные интервалы между членами одинаковы и равны  $\Delta t$ . Выбирается натуральное число  $L$  такое, что  $1 < L < N$ . Образуется  $K = N - L + 1$  векторов вложения размерности  $L$

$$X_i = (x_{i-1}, \dots, x_{i+L-2})^T, 1 \leq i \leq K,$$

которые образуют траекторную матрицу (матрицу реконструкции), где векторы вложения  $X_i$  являются столбцами,

$$X = [X_1: \dots: X_K].$$

Для этой матрицы производится сингулярное разложение (SVD разложение).

Пусть  $S = XX^T$ . Обозначим  $\mu_1, \dots, \mu_L$  – собственные числа матрицы  $S$ , взятые в неубывающем порядке и  $U_1, \dots, U_L$  – соответствующие им собственные векторы матрицы  $S$ . Обозначим правым сингулярным вектором матрицы  $X$  вектор  $V_i = \frac{X^T U_i}{\sqrt{\mu_i}}$ ,  $i = 1, \dots, L$ . Обозначим  $[V_i, U_i, \mu_i]$  как собственную тройку разложения.

Чтобы извлечь тренд из ряда, требуется собрать все собственные тройки с медленно меняющимися сингулярными векторами  $V_i$ . Следуя нашему предположению о поведении ряда, он является рядом с ярко выраженной тенденцией, где  $Ae^{\lambda_1 t}$  оказывает на динамику намного большее влияние, чем произвольная  $f(t)$ . Для группировки следует выбирать тройки соответствующие наибольшему собственному числам. В соответствии с нашим предположением, достаточно первой тройки. Таким образом, для наибольшего собственного числа и наибольшего собственного вектора находится сингулярный вектор  $V_1$  матрицы  $X$ :

$$V_1 = (v_0, \dots, v_N) = \frac{X^T U_1}{\sqrt{\mu_1}}.$$

Вектор  $V_1$  является траекторией тренда с установленным шагом времени  $\Delta t$ . Для

него можно вычислить среднее значение логарифма производной, взяв модуль всех элементов ряда, чтобы избежать появления отрицательных значений под логарифмом. Первый показатель  $\lambda_1$  можно вычислить по следующей формуле:

$$\lambda_1 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|\ln(v_{i+1})| - |\ln(v_i)|}{\Delta t}.$$

В заключительной части главы рассматриваются контрпримеры, указывающие на неадекватность подобных методик для некоторых классов систем и неполную обоснованность понятия – «первый показатель Ляпунова» для нелинейных систем и временных рядов. В частности рассматривается пример из книги (Демидович, 1987)<sup>2</sup>:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \ln x, (t > 0, x > 0).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = e^{ct},$$

где  $c$  – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий. Аналитическому решению соответствует бесконечный набор характеристических показателей. В силу решения влияющей на динамику системы становятся начальные условия.

Так же приводится пример О. Перрона<sup>3</sup>, показывающий, что глобально устойчивая нелинейная система может иметь положительный характеристический показатель.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1, \\ \dot{x}_2 = -2ax_2, \\ \dot{x}_3 = (\sin(\ln(t+1)) + \cos(\ln(t+1)) - 2a)x_3 + x_2 - x_1^2. \end{cases}$$

Делается вывод, что использование термина «первый показатель Ляпунова» сталкивается с определенными трудностями при вычислении его для временного ряда. В отличие от «первого показателя», введенного в первом методе Ляпунова, «первый показатель», рассчитанный для временных рядов, не обладает свойством глобальности, то есть невозможно говорить об устойчивости системы в целом. Невозможно говорить о локальной устойчивости относительно каких-то частей фазового пространства систем.

Приводятся примеры из литературы, описывающие варианты решения данного противоречия математиками.

В итоге приводятся основные требования к методам исследования устойчивости сложных систем:

1. Требование того, чтобы отображение было хотя бы дважды дифференцируемо. В силу того, что производная рассчитывается численно, требуется так же, чтобы она не была «слишком велика».
2. Предполагается однородность свойств аттрактора, что позволяет экстраполировать результаты расчета показателя на хотя бы локальную область фазового пространства.
3. Длина временного ряда предполагается достаточно большой, чтобы получать корректные значения.

<sup>2</sup> Б.П. Демидович. Лекции по математической теории устойчивости. М.–Наука. 1987.– С 472

<sup>3</sup> Г.А. Леонов. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости. – М. –Ижевск: АНО «Институт компьютерных исследований», НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 168 с.

4. Уровень шума должен быть, по крайней мере, в несколько раз меньше, чем требуемая степень точности значения показателя.

**Третья глава** «*Реализация библиотеки в системе Matlab*» содержит описание элементов библиотеки в системе Matlab, созданных для анализа временных рядов.

Описывается созданный блок Simulink для построения 3D фазовых портретов. Блок обладает гибкими параметрами настройки, включающими управление границами отображения, дискретизацию по времени, возможность отображать только актуальное состояние фазовой траектории и игнорировать те части траектории, которые не кажутся необходимыми. Также блок обладает способностью строить сечение Пуанкаре и выводить точки пересечения с плоскостью в отдельное окно. Представлен пример использования блока для исследования поведения системы Лоренца.

Рассматривается динамическая реализация алгоритмов и создание блоков, которые можно использовать в Simulink. Представляются основные параметры и свойства блоков. Исследуется причина возникновения «переходного процесса» при динамическом расчете показателя, а также причина возникновения запаздывания у значения показателя при таком методе оценки в случае, если он изменяется со временем.

**В четвертой главе** «*Практическое применение метода*» оцениваются сравнительные характеристики предложенных методов и алгоритмов. Исследуется влияние параметров реконструкции, шага расчета и количества расчетных точек на точность вычисления первого показателя. Проводится анализ нелинейных и нестационарных систем на устойчивость. Исследуется динамика гидростатического привода с последовательными каналами управления расходом с точки зрения устойчивости с использованием разработанных методов.

Представлено описание и обоснование используемых при моделировании тестовых систем. Исследуются следующие системы.

1. Модель следящей системы 3-го порядка с контуром по положению в стационарном режиме, в качестве линейной системы.
2. Модель следящей системы 3-го порядка с контуром по положению в нестационарном режиме, с известной функцией изменения показателя.
3. В качестве нелинейной стационарной системы берется осциллятор Ван-дер-Поля, со встроенным экспоненциальным затуханием.
4. В качестве нелинейной нестационарной системы используется осциллятор Ван-дер-Поля с экспоненциальным множителем к выходной переменной. Значение показателя экспоненты меняется по известному закону.
5. В качестве сложной стационарной системы используется модель управления линейным электродвигателем (ЛЭД) типа DDV с обратной связью по усилию.
6. В качестве сложной нестационарной системы берется та же модель системы управления ЛЭД с имитацией постепенного отказа обратной связи по усилию.

Описываются критерии, по которым будет оцениваться точность расчета показателя.

Далее представлены результаты моделирования тестовых систем для каждой из трех представленных моделей. Для каждого из шести методов исследовалось влияние на точность следующих параметров:

- 1) размерности реконструкции;
- 2) количества точек ряда при постоянном шаге расчета;
- 3) влияния шага расчета и количества точек ряда при постоянном времени расчета.

Выводы по результатам моделирования:

1. SSA-метод показал свою адекватность в случае оценки динамически изменяющегося показателя. Ошибка оценки статического показателя колеблется (в среднем) в районе 3-4% от теоретического значения.

2. Метод Розенштейна так же показал адекватность, нечувствительность к изменению параметров. Ошибка расчета статического показателя колеблется (в среднем) в районе 1-3% от теоретического значения. Ошибка оценки динамически меняющегося показателя колеблется в районе 4-9% от теоретического значения.

3. Метод Вольфа показал малую адекватность и сильную чувствительность к изменению любых параметров, довольно большую ошибку. Ошибка расчета статического показателя колеблется (в среднем) в районе 5-10% от теоретического значения. Ошибка оценки динамически меняющегося показателя находится в районе 25% от теоретического значения.

4. Логарифмический метод для стационарного случая показал адекватность, нечувствительность к изменению параметров. Ошибка расчета статического показателя колеблется (в среднем) в районе 0.5-2% от теоретического значения. Ошибка оценки динамически меняющегося показателя колеблется в районе 3-7% от теоретического значения.

5. Интерполяционный метод обладает всеми достоинствами логарифмического метода, однако является менее чувствительным к вариации размерности реконструкции. Ошибка расчета статического показателя колеблется (в среднем) в районе 0.2-3% от теоретического значения. Ошибка оценки динамически меняющегося показателя колеблется в районе 3-7% от теоретического значения.

6. Метод выделения логарифма является наиболее просто реализуемым в Matlab'e методом. Ошибка расчета статического показателя колеблется (в среднем) в районе 0.2-1% от теоретического значения. Ошибка динамически меняющегося показателя колеблется в районе 3-7% от теоретического значения.

В качестве примера использования методов, исследуется динамика системы управления углом тангажа самолета F-14. Рассматриваются:

- линеаризованная модель управления углом тангажа с известным теоретическим значением показателя;
- нелинейная модель с включенным нелинейным блоком люфта;
- нелинейная модель с включенными блоками люфта и насыщения управляющих рулей;
- нелинейная модель с зашумленным сигналом обратной связи.

По результатам исследования делаются выводы о влиянии нелинейностей и шума на значение первого показателя. В частности отмечается замедление динамики при включении блока насыщения и потеря устойчивости при введении

блока люфта. Для системы с шумом отмечается удовлетворительная точность оценки первого показателя в зашумленном случае, соответствующая незашумленному варианту.

В заключительной части главы приведены исследования динамики гидростатического привода с последовательными каналами управления расходом. Движение выходного звена регулируется двумя каналами: насосом переменной производительности и распределительным золотником гидроусилителя. В ходе исследования, проводимого на ОАО «ПМЗ Восход» было показано, что при воздействиях малой амплитуды управление выходным звеном носит мультипликативный характер.

С помощью разработанного алгоритма было проведено исследование устойчивости соответствующих решений, изменения показателя во времени. Расчет показал, что при достаточно малом входном воздействии, показатель Ляпунова при стремлении траектории к состоянию равновесия стремится к нулю.

При разных шагах расчета показателя адекватность значения показателя теряется на значениях порядка 0.02-0.04. Это происходит из-за того, что переходный процесс становится слишком медленным и для такого шага напоминает линейную функцию времени. Значения показателя больше зависят от шага, нежели от динамики системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, полученные по итогам работы над диссертацией:

1. Разработаны методы расчета первого показателя Ляпунова для заданного временного ряда, на основе модификаций методов Вольфа, Сано-Савадо-Экманна и Розенштейна.
2. Разработаны оригинальные методы расчета первого показателя Ляпунова для заданного временного ряда.
3. Обоснована адекватность созданных методов для различных классов нелинейных систем.
4. Выявлены преимущества разработанных методов, при исследовании различных по свойствам наборов данных, характеризующих динамику различных систем.
5. Создан программный комплекс, реализующий разработанные методы и инструментарий исследования устойчивости систем с позиции теории хаоса.
6. Проведено исследование влияния параметров разработанных методов на точность оценки первого показателя.
7. Исследованы на локальную во времени устойчивость модели сложных объектов, содержащих степенные и мультипликативные нелинейности с помощью разработанного программного комплекса.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации, входящие в перечень изданий и журналов, рекомендованных ВАК России

1. Исследование динамики распределения жидкости в аксиально-поршневом насосе электрогидропривода с дросселированием потока в линиях всасывания и нагнетания. [Текст] / Н.Д. Поляхов, О.В. Вашкевич, В.Е. Кузнецов, А.В. Кузнецов, А.В. Беспалов, О.Э. Якупов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Известия государственного электротехнического университета). Сер. «Электротехника». – СПб.:СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006 № 1. –С. 30–36
2. Мехатронный электрогидравлический модуль с цифровым управлением [Текст] / Н.Д. Поляхов, О.В. Вашкевич, В.Е. Кузнецов, А.В. Кузнецов, А.В. Беспалов, О.Э. Якупов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Известия государственного электротехнического университета). Сер. «Автоматизация и управление». – СПб.:СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006 № 1.–С. 43–46.
3. Интеллектуальное управление в технических системах/ Н. Д. Поляхов., И. А. Приходько, А. А. Карачев, А. В. Вейнмейстер, А. В. Беспалов //Мехатроника, автоматизация, управление. 2007, № 10, – С 11–15.

### Публикация в другом издании

4. On the local stability estimation using first Lyapunov exponent calculation. Alexander V. Bepalov, Yury S. Chistyakov. Eurocon 2009, 18-23 Мая 2009 г. –СПб., 2009. –С.1985–1990.

### Материалы конференций

5. Оценка устойчивости нелинейных систем на основе вычисления старшего ляпуновского показателя./ А.В.Беспалов, О.В. Вашкевич, В.Е. Кузнецов, Н.Д. Поляхов, О.Э. Якупов // Материалы Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM–2007), 25–27 июня 2007 г. –СПб., 2007. –Т.1. –С.107–112.
6. Подходы к оценке первого показателя Ляпунова. А. В. Беспалов, Н. Д. Поляхов, Материалы Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM–2008), 23–25 июня 2008 г. –СПб., 2008. –Т.1. – С.87–90.
7. Метод оценки первого показателя Ляпунова по временному ряду. А.В, Беспалов, О.Э. Якупов, Н.Д. Поляхов. Материалы Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM–2010), 23–25 июня 2010 г. –СПб, 2010. –Т.1. –С.150–154.